

Pràctiques de Mecànica Racional.  
Enginyeria Civil.  
Departament de Física.  
Curs 2017/2018.

J. Sánchez  
F. Marquès

15 December 2017

# Índex

<b>1</b>	<b>Pròleg</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Tractament de dades experimentals</b>	<b>3</b>
2.1	Càlcul d'errors . . . . .	3
2.1.1	Introducció . . . . .	3
2.1.2	Definició d'error . . . . .	3
2.1.3	Classificació dels errors . . . . .	4
2.1.4	Càlcul de l'error de resolució . . . . .	4
2.1.5	Càlcul de l'error accidental . . . . .	5
2.1.6	Mesures indirectes . . . . .	6
2.1.7	Càlcul d'errors en les mesures indirectes . . . . .	6
2.1.8	Arrodoniment i nombre de xifres significatives . . . . .	8
2.2	Representació gràfica i interpretació de dades experimentals . . . . .	8
2.3	Ajust d'una recta a les dades experimentals . . . . .	9
2.3.1	Introducció . . . . .	9
2.3.2	Regressió per mínims quadrats . . . . .	9
2.3.3	Coefficient de correlació . . . . .	10
2.3.4	Error dels coeficients a i b . . . . .	10
2.4	Taula de la distribució t de Student . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Descripció de les pràctiques</b>	<b>13</b>
3.1	Pràctica 1: Mesura de longituds i masses . . . . .	13
3.1.1	Peu de rei . . . . .	13
3.1.2	Cargol micromètric o pàlmer . . . . .	13
3.1.3	Descripció de la pràctica . . . . .	14
3.2	Pràctica 2: Llei de Hooke . . . . .	14
3.2.1	Comprovació de la llei de Hooke . . . . .	14
3.2.2	Mètode dinàmic . . . . .	15
3.3	Pràctica 3: Càlcul dels moments d'inèrcia d'un disc . . . . .	15
3.3.1	Descripció de la pràctica . . . . .	16
3.4	Pràctica 4: Pèndol reversible . . . . .	16
3.4.1	Fonamentació . . . . .	16
3.4.2	Descripció de la pràctica . . . . .	17
3.4.3	Determinació del període de reversibilitat. . . . .	18
3.5	Pràctica 5: Pèndols acoblats . . . . .	19
3.5.1	Equacions del moviment. . . . .	19
3.5.2	Descripció de la pràctica . . . . .	21
3.6	Pràctica 6: Canal de Galileu . . . . .	21
3.6.1	Cinemàtica . . . . .	21
3.6.2	Balanç energètic . . . . .	22

# Capítol 1

## Pròleg

Aquestes notes volen ésser una guia per a les Pràctiques de Laboratori de Mecànica per a estudiants de les titulacions impartides per l'E.T.S.E. de Camins Canals i Ports de Barcelona. El seu objectiu és doble. En primer lloc, introduir a l'estudiant en un tema tan ampli i delicat com és el tractament de dades experimentals: càlcul d'errors, ajust d'un model a les dades, presentació dels resultats... Aquests temes constitueixen la primera part d'aquestes notes.

La segona part conté una descripció detallada de les pràctiques que han de realitzar els alumnes. El seu objectiu és descriure en detall la pràctica a realitzar, de manera que l'alumne pugui llegir-la abans d'anar al Laboratori i es familiaritzi amb el treball a desenvolupar. Cada pràctica inclou un full amb un model de l'informe que l'alumne haurà de realitzar per a cada pràctica, amb la descripció dels resultats obtinguts. Aquests informes constituïran la base per a la qualificació de les pràctiques. Cal remarcar que els resultats s'han de donar amb les corresponents unitats i error. És també important que l'alumne es llegeixi les pràctiques abans de la sessió, així com que porti i conegui el funcionament de la seva calculadora (en particular el càlcul de desviacions estàndard i ajust d'una recta).

El contingut d'aquesta segona part canviarà cada any, a mesura que es desenvolupin noves pràctiques, o es millorin les ja existents. És intenció dels professors de Mecànica informatitzar progressivament totes les pràctiques, des de la recollida de dades fins al tractament d'aquestes, passant pel control de l'experiment a realitzar. Aquesta tasca es realitzarà, en la mesura que es disposi dels medis adients.

Barcelona, setembre 1995.

## Capítol 2

# Tractament de dades experimentals

### 2.1 Càlcul d'errors

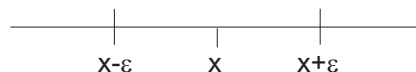
#### 2.1.1 Introducció

Les ciències experimentals, sobre tot la Física i la Química, es fonamenten en lleis matemàtiques que relacionen entre si les magnituds obtingudes en el laboratori. Aquestes lleis constitueixen abstraccions de la realitat, perquè la precisió infinita de les fórmules matemàtiques no existeix en la pràctica. La noció de l'error és, per tant, fonamental per qui treballa en un laboratori.

#### 2.1.2 Definició d'error

El primer descobriment que hom fa en un laboratori és que els resultats de les mesures no són matemàticament exactes. Per exemple, si pesem un cos i la balança assenyala 15.3 kg no podem deduir que aquest nombre sigui matemàticament exacte, és a dir, no es pot assegurar que el cos pesi exactament 15.3 kg (15.30000 ...). Per afinar el tercer, quart, etc. decimals es necessitarien mètodes més precisos.

Així doncs, el resultat d'una mesura no pot reduir-se mai a un punt sobre una recta sinó que serà un interval sobre aquesta recta. La notació usual és  $x \pm \varepsilon$



on  $x$  indica quin és el valor que es considera bo com a resultat de la mesura, i  $\varepsilon$  representa la incertesa per excés o per defecte.  $\varepsilon$  és un nombre positiu, s'anomena error absolut de la mesura, i té les mateixes unitats que  $x$ . Qualsevol nombre comprès entre  $x + \varepsilon$  i  $x - \varepsilon$  pot ésser el valor real de la mesura efectuada.

Suposem que, en l'exemple anterior, donéssim com a resultat de la pesada  $15.3 \pm 0.5$  kg; això significa que el pes real del cos és algun valor comprès entre 14.8 i 15.8 kg, no essent possible precisar més amb el mètode de pesada utilitzat.

Es clar que una mesura és millor quant més petit sigui l'error del que ve afectada. Però, com que l'error mai pot reduir-se a zero, qualsevol resultat experimental ha de portar especificat el seu error corresponent.

Altres vegades, però, podem parlar d'error relatiu, quantitat que es defineix com

$$\varepsilon_{rel} = 100 \frac{\varepsilon}{x} \quad (2.1)$$

i es mesura en tant per cent degut a que és un nombre adimensional. Aquesta mesura de l'error és un mètode per valorar la qualitat de la mesura realitzada.

Un mateix error absolut pot correspondre a una mesura molt bona o molt dolenta. Per exemple, si algú mesura l'àrea d'una gran extensió agrícola amb un error de  $1 \text{ m}^2$ , hom reconeixerà que s'ha fet una bona mesura; ara bé, si mesurem l'àrea d'una habitació amb el mateix error hom convindrà que el resultat és pèssim.

### 2.1.3 Classificació dels errors

Les causes dels errors en les mesures experimentals són molt variades, i atenent a elles es poden classificar en dos grups:

- a) Errors de resolució: Són els deguts al fet que la precisió dels aparells és limitada. Per exemple, si la divisió més petita del dial d'un voltímetre correspon a una diferència de potencial d'un volt, la precisió de les mesures realitzades no serà suficient per apreciar dècimes, centèsimes, etc. de volt. Aquests errors són inherents a qualsevol mesura i, per tant, inevitables.
- b) Errors accidentals: Quan es repeteix un experiment varies vegades en *aparentment* idèntiques condicions s'observa que els resultats no coincideixen. Si hom pogués controlar tots els factors que incideixen sobre un experiment, no es trobaria cap dispersió en els resultats. Però, en la pràctica, això és impossible. Existeixen una sèrie de factors aleatoris que unes vegades provoquen desviacions en una direcció, i altres, en la contrària. Aquestes desviacions en les mesures d'una mateixa magnitud introdueixen una incertesa en el resultat final que s'anomena error accidental. La seva estimació es basa en mètodes estadístics.

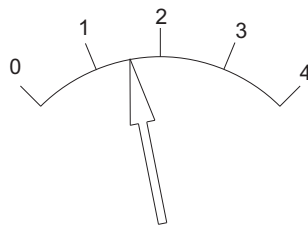
L'error total d'una mesura serà sempre la suma d'aquests dos tipus d'error

$$\varepsilon = \varepsilon_{res} + \varepsilon_{ac} \quad (2.2)$$

### 2.1.4 Càlcul de l'error de resolució

No existeix una regla fixa per a estimar l'error de resolució. En els aparells de mesura amb escala visible o amb dial pot prendre's com error de resolució la meitat de la divisió més petita. Això és degut a que hom és capaç de discernir si la lectura de l'aparell queda més pròxima a una divisió o a la següent.

En la figura adjunta la lectura queda més propera a una divisió de l'aparell que a la següent. Podem imaginar sense dificultat una línia que passés per la divisió 1.5 i utilitzar-la per determinar el valor de la mesura.

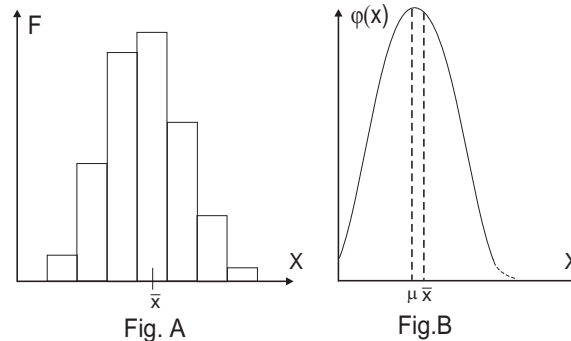


Hi ha aparells on les divisions són massa petites per distingir bé el seu punt mig; en aquestes circumstàncies, caldrà prendre com a error de resolució la mida de la divisió més petita. De la mateixa manera, en els aparells digitals l'error de resolució és també la xifra de màxima precisió.

Habitualment els fabricants d'aparells de mesura indiquen quin és l'error que s'ha d'assignar a una mesura feta amb ells.

### 2.1.5 Càlcul de l'error accidental

Si hom efectua varies mesures (anomenem  $N$  el nombre de mesures realitzades) d'una magnitud  $x$ , podem construir amb aquestes un histograma. En l'eix de les  $x$  dibuixarem els valors obtinguts en la mesura en intervals, i sobre l'eix de les  $y$  hi farem correspondre la freqüència relativa corresponent a cada interval. És a dir, si en el primer interval caben  $n_1$  valors, la freqüència relativa -altura de l'histograma- és  $f_1 = n_1/N$ , i així successivament per tots els altres.



S'observa que la forma de l'histograma és sovint semblant a la de la figura A : existeix una zona de l'eix d'abscisses on les freqüències són màximes, decreixent a ambdós costats d'aquestes. El *centre* ve donat per la mitjana aritmètica de totes les mesures ( $i = 1, \dots, N$ )

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (2.3)$$

Aquest *centre* serà el que donarem com a resultat de la mesura. Però, donar únicament el valor de la mitjana és insuficient: dues sèries de dades poden tenir el mateix valor mig  $i$ , en canvi, tenir més o menys dispersió al seu voltant. Cal doncs definir una nova magnitud que ens digui quant disperses són les dades obtingudes. Usualment, amb aquest objecte, s'utilitza l'anomenada desviació estàndard  $s$

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.4)$$

que és la mitjana dels quadrats de les desviacions de les dades respecte de la mitjana. És clar que com més *esvelt* sigui l'histograma més petit serà el valor de  $s$ . La raó de la presència de  $N-1$  al denominador en lloc de  $N$  és deguda al fet que les  $N$  desviacions  $x_i - \bar{x}$  no són independents (de fet la seva suma dóna zero); sols n'hi ha  $N-1$  d'independents. Aquest nombre  $N-1$  s'anomena nombre de graus de llibertat.

La pregunta, però, és: quin error li assignem a la mitjana? La resposta és tècnicament complicada i en donarem només una visió qualitativa.

Augmentant el nombre de mesures de  $x$  indefinidament, l'histograma A seria cada vegada més semblant a una corba acampanada (*campana de Gauss*) de la figura B, coincidint amb aquesta quan  $N \rightarrow \infty$ . Es defineix el valor real de la magnitud com el valor mig  $\mu$  de la distribució de Gauss.

En la pràctica és impossible realitzar un nombre infinit de mesures. No és possible, per tant, conèixer experimentalment el valor de  $\mu$ . La mitjana  $\bar{x}$  de 2.3 és una estimació del valor desconegut  $\mu$ ; normalment aquests dos valors no coincideixen com es veu a la figura.

L'error que hem d'assignar a  $x$  ha de ser tal que defineixi un interval a l'entorn de  $x$  que contingui  $\mu$ . El càlcul d'aquest interval té un contingut probabilístic, donada la nostra ignorància sobre  $\mu$ . Com més segurs vulguem estar de localitzar  $\mu$  en un entorn de  $x$ , més gran serà la longitud d'aquest interval. A Estadística es demostra que  $\mu$  es troba en l'interval

$$\bar{x} \pm \varepsilon_{ac} \quad (2.5)$$

amb una probabilitat  $p$  si

$$\varepsilon_{ac} = t_p(N-1) \frac{s}{\sqrt{N}} \quad (2.6)$$

A  $\varepsilon_{ac}$  se l'anomena error accidental.  $s$  ve donada per 2.4 i  $t_p(N-1)$  és un nombre que es dedueix de l'anomenada distribució d'Student. Depèn de la probabilitat  $p$  i de  $N$  i té dues característiques molt importants

- Disminueix en augmentar  $N$  ( $p$  fix)
- Augmenta en augmentar  $p$  ( $N$  fix).

Aquestes propietats es poden comprovar a la taula de valors de  $t_p(N)$  adjunta, i es corresponen amb els raonaments de tipus qualitatiu anteriors.

NOTA: Com hem observat, les mesures  $\bar{x}$  i  $s$  són aproximacions als valors reals  $\mu$  i  $\sigma$  (desconeguts) de la magnitud mesurada. Això no obstant, per abús del llenguatge, és comú confondre  $\bar{x}$  amb  $\mu$  i  $s$  amb  $\sigma$ . Per aquesta raó s'acostuma a donar  $\bar{x}$  i  $\sigma$ , i aquesta és la nomenclatura habitual a les calculadores.

### 2.1.6 Mesures indirectes

Sovint interessa conèixer magnituds que no es poden mesurar directament, sinó que s'han d'obtenir a partir d'altres que sí que es poden mesurar. Per exemple, per conèixer el volum i la densitat d'un sòlid esfèric utilitzarem: un palmer per mesurar el seu diàmetre ( $D$ ), i una balança per esbrinar la seva massa ( $M$ ). Amb l'ajut de les fórmules

$$V = \frac{1}{6}\pi D^3 \quad d = \frac{M}{V} \quad (2.7)$$

podrem calcular les magnituds que desitgem. A aquestes mesures que no s'obtenen directament de l'experiència se les anomena mesures indirectes. El pas següent serà trobar l'error amb que s'obtenen aquest tipus de mesures.

### 2.1.7 Càlcul d'errors en les mesures indirectes

Distingirem entre errors de resolució i errors accidentals.

#### Errors de resolució

Suposem que la nostra mesura és indirecta y només depèn de la mesura directa  $x$ :  $y = y(x)$ . En aquest cas, l'error de resolució ve donat per:

$$\varepsilon_{res}(y) = |y'(x)| \varepsilon_{res}(x) \quad (2.8)$$

on  $y'(x)$  és la derivada de la funció  $y(x)$ . S'agafa en valor absolut per a garantir que l'error sigui positiu. La deducció d'aquesta fórmula es fa a partir del desenvolupament en sèrie de Taylor de la funció  $y(x)$  al voltant del valor mig, negligint tots els termes d'ordre superior al primer. Si  $y$  depèn d'un conjunt de mesures directes  $(x^1, \dots, x^n)$ , llavors la fórmula a emprar és:

$$\varepsilon_{res}(y) = \left| \frac{\partial y}{\partial x^1} \right| \varepsilon_{res}(x^1) + \dots + \left| \frac{\partial y}{\partial x^n} \right| \varepsilon_{res}(x^n) \quad (2.9)$$

essent  $\varepsilon_{res}(x^1), \dots, \varepsilon_{res}(x^n)$  els errors de resolució associats a les  $x^1, \dots, x^n$  respectivament. Les derivades es calcularan en el punt  $(x^1, \dots, x^n)$ .

### Errors accidentals

Suposem que volem determinar el valor d'una magnitud indirecta  $y$  que depèn de varies mesures directes:  $x^1, x^2, \dots, x^n$ . En fer l'experiment determinem  $N$  valors per cadascuna d'elles i determinem els valors mitjans  $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n$ , i les desviacions estàndard  $s(x^1), s(x^2), \dots, s(x^n)$ . La determinació de l'error en aquest cas és complicada degut a que quan  $N$  augmenta l'histograma no esdevé una campana de Gauss. Afortunadament, si les desviacions estàndard són petites comparades amb les mitjanes respectives, l'histograma s'aproxima a la distribució de Gauss. Normalment aquest serà el cas en que ens trobarem a la pràctica. Pel càlcul de  $y$  utilitzarem:

$$y = y(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n) \quad (2.10)$$

i per a la desviació estàndard de  $y$ :

$$s^2(y) = \left| \frac{\partial y}{\partial x^1} \right|^2 s^2(x^1) + \dots + \left| \frac{\partial y}{\partial x^n} \right|^2 s^2(x^n) \quad (2.11)$$

on els valors de les derivades parcials s'han de calcular al punt  $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)$ .

Per calcular finalment l'error accidental, corresponent a una probabilitat  $p$  de que el valor exacte estigui en l'interval donat, farem servir com abans la distribució d'Student. Per això ens cal saber el nombre de graus de llibertat. Si per a cada  $x^i$  hem fet el mateix nombre de mesures  $N$ , llavors podem aplicar 2.6 directament. Si el nombre de mesures per a cada  $x^i$  és diferent, l'estimació rigorosa de l'error accidental és força complexa; ens conformarem amb la següent recepta aproximada (que estima l'error per excés)

$$\varepsilon_{ac}(y) = t_p(\infty) s(y) \quad (2.12)$$

De fet, com que  $t_{0.95}(\infty) = 1.96 \simeq 2$ , és pràctica habitual prendre com error accidental  $2s(y)$ .

L'error total serà finalment la suma dels errors accidental i de resolució

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_{res}(y) + \varepsilon_{ac}(y). \quad (2.13)$$

Cal fer notar que els dos tipus d'errors s'han de propagar independentment fins al final, i després sumar-los.

Existeix un altre mètode per a propagar els errors accidentals, que aquí discutirem únicament per a una sola magnitud  $x$ , de la qual disposem de  $n$  mesures  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . Per a obtenir  $y = f(x)$  calcularem en primer lloc  $y_i = f(x_i)$  i aplicarem llavors 2.3, 2.4

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \\ s^2(y) &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - \bar{y})^2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Podem comparar amb el que dona 2.10 i 2.11:

$$\begin{aligned} \bar{y} = y(\bar{x}) &= f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \\ s^2(y) &= \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Què és millor, 2.14 o 2.15?. 2.14 és més correcte, però en canvi costa més de calcular; a 2.14 tenim  $n$  avaluacions de  $f(x)$  i a 2.15 només dues. Si  $f$  és una funció suau i les dades (les  $x_i$ ) no estan molt disperses, 2.15 resulta una bona aproximació a 2.14, i la utilitzarem habitualment.

### 2.1.8 Arrodoniment i nombre de xifres significatives

Comencem amb un exemple. Què voldria dir donar el resultat d'una mesura de volum com  $1589.93 \pm 91.47 \text{ cm}^3$ ?. No té sentit precisar dues xifres decimals en el valor que hom dona per bo quan l'error d'aquest nombre és de l'ordre d'una centena!

L'arrodoniment és per tant una pràctica necessària. Els errors s'acostumen a donar amb una xifra significativa o com a molt dues; més precisió normalment no té cap valor. En l'exemple esmentat fora correcte donar  $(15.9 \pm 0.9)10^2 \text{ cm}^3$ . Observem que la notació exponencial (anomenada també científica) ens permet evitar escriure xifres que no té sentit precisar.

**ATENCIÓ:** només hem d'arrodonir els resultats finals, qualsevol operació d'arrodoniment en punts intermedis dels càlculs introdueix errors en els resultats deguts a la mala manipulació dels nombres i no deguts a les mesures experimentals. Es per tant necessari mantenir el màxim de xifres decimals en tot el procés de càlcul, i arrodonir tan sols els resultats finals.

Per acabar, és necessari comentar que existeixen uns altres errors: els errors sistemàtics. Fins ara hem considerat que els aparells de mesura estaven ben calibrats. Les mesures efectuades amb aparells mal calibrats introdueixen errors en elles, aquests errors s'anomenen errors sistemàtics. Els errors sistemàtics són direccionals, no donen un marge entorn d'un valor mig en el qual es troba el valor real, sinó que aquest sempre queda a un costat del marge. Hi ha un tipus d'error sistemàtic, l'error de zero, que és fàcil de mesurar i que per tant cal corregir sempre. Pel que fa a la calibratge, els aparells correctament fabricats han de presentar un error de calibratge menor que la precisió de l'aparell.

## 2.2 Representació gràfica i interpretació de dades experimentals

En un experiment normalment es consideren diverses variables i un dels objectius de l'experiment consisteix en trobar quines relacions existeixen entre les variables examinades, o comprovar si les dades obtingudes s'ajusten a algun model teòric o al resultat d'altres experiències. Parlarem per concretar de dues variables  $x$ ,  $y$ . La representació gràfica dels valors mesurats sovint presenta moltes utilitats. Si la representació es realitza acuradament, la gràfica ens dona la relació entre les variables  $x$  i  $y$ . Per a realitzar una representació gràfica poden ser útils les següents idees:

- Si la representació es realitza manualment és convenient utilitzar paper mil·limetrat. Si els valors estan continguts en un interval amb més de dos ordres de magnitud és convenient realitzar representacions logarítmiques essent útil l'ús de paper semilogarítmic.
- Cal triar les escales dels eixos, considerant els valors extrems de  $x$  i  $y$ , de forma que la gràfica ocupi gran part del paper.
- Les divisions i subdivisions dels eixos s'han de triar de forma que sigui fàcil treballar amb elles (per exemple assignem a un nombre sencer de divisions un nombre sencer d'unitats).
- El punt d'intersecció dels eixos no té perquè ser el  $(0,0)$ , pot ser qualsevol altre que faci més fàcil la representació.
- Si s'espera que la gràfica sigui una recta, pot ser útil triar els eixos de forma que el pendent de la recta sigui d'uns  $45^\circ$  així podem facilitar càlculs posteriors sobre la gràfica (derivada, interpolació de punts, ....)
- Es necessari col·locar les dimensions i unitats que corresponen a cada eix.
- Els intervals en els histogrames cal triar-los de manera que dintre de cada interval hi hagi un nombre raonable de mesures. Si tenim  $N$  mesures en total es recomana agafar un nombre d'intervals  $\simeq \sqrt{N}$ . Així, si tenim 20 mesures es poden prendre de 4 a 6 intervals; prendre'n

1 o 2 no ens informaria de res, i si en prenem 40 la majoria estaran buits o contindran un sol valor, donant un histograma inintel·ligible.

- El paper semilogarítmic facilita representacions de magnituds que tenen un marge molt ampli entre els valors numèrics dels seus extrems. En aquest paper les divisions en un dels eixos no són equidistants sinó logarítmiques (per ex. hi ha la mateixa distància entre 0.1 i 1 que entre 1 i 10 ja que  $\log(0.1) = -1$ ,  $\log(1) = 0$  i  $\log(10) = 1$ ). També és útil el paper logarítmic quan les dues magnituds  $x$ ,  $y$  varien en un marge molt ampli.

## 2.3 Ajust d'una recta a les dades experimentals

### 2.3.1 Introducció

La corba més senzilla, i la més fàcil d'ajustar a un conjunt de dades  $(x, y)$  és una recta. Sovint la dependència  $y = f(x)$  no serà lineal, però fent canvis senzills tant de  $x$  com de  $y$  és possible reduir molts casos a l'estudi de la dependència lineal  $y = ax + b$ . Veiem dos exemples.

1. La llei que dona el període d'un pèndol en funció de la seva llargada és . Per tant la relació entre  $T$  i  $l$  és parabòlica:  $T^2 = 4\pi^2 l/g$ . Però si representem  $y = T^2$  en funció de  $x = l$ , obtenim la llei lineal  $y = (4\pi^2/g)x$ .
2. La llei que dona l'amplada d'un oscil·lador esmorteït en funció del temps és exponencial:  $A = A_0 e^{-\lambda t}$ . Però si posem  $y = \ln A$ ,  $x = t$  obtenim de nou una llei lineal:  $y = -\lambda x + \ln A_0$ .

La magnitud més important en l'ajust d'una recta és el seu pendent, que normalment conté la magnitud que volem mesurar. En els exemples anteriors, el pendent de la recta ens permetria determinar l'acceleració de la gravetat  $g$  i el coeficient d'esmoreïment  $\lambda$  respectivament.

### 2.3.2 Regressió per mínims quadrats

Existeix un mètode objectiu per la determinació de l'equació de la recta que millor s'ajusta a un conjunt de punts: és el mètode de la regressió per mínims quadrats.

Suposarem que tenim  $k$  parelles de valors  $(x_i, y_i)$ , on  $i$  va de 1 a  $k$ . La hipòtesi fonamental de l'anàlisi que desenvoluparem és que els errors corresponents a  $x$  són molt més petits que els corresponents errors per les  $y$ , i per tant els negligibles; i a l'hora d'ajustar la recta demanarem que la suma de les desviacions al quadrat de les  $y_i$  respecte de la recta buscada siguin mínims.

Ajustarem una recta de la forma  $y = ax + b$  als  $k$  punts  $(x_i, y_i)$  que tenim, demanant que

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^k (y_i - ax_i - b)^2 \quad (2.16)$$

sigui mínim. Es a dir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} f(a, b) &= -2 \sum_{i=1}^k (y_i - ax_i - b)x_i = 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} f(a, b) &= -2 \sum_{i=1}^k (y_i - ax_i - b) = 0 \end{aligned}$$

d'on es dedueixen sense dificultats els valors de  $a$  i  $b$

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad b = \bar{y} - a\bar{x} \quad (2.17)$$

on hem posat

$$\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^2, \quad \overline{xy} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i y_i, \quad \text{etc.} \quad (2.18)$$

De l'expressió de  $b$  es dedueix immediatament que la recta de regressió passa pel punt  $(\bar{x}, \bar{y})$ :  $y - \bar{y} = a(x - \bar{x})$ . Cal fer notar també que el denominador de  $a$  és sempre positiu:

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 - \overline{x^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \geq 0 \quad (2.19)$$

i el mateix succeeix amb  $\overline{y^2} - \bar{y}^2$ .

### 2.3.3 Coeficient de correlació

Matemàticament podem ajustar qualsevol conjunt de punts a una recta. El coeficient de correlació  $r$  és un índex que ens indica la bondat del nostre ajust. El coeficient de correlació es pot calcular utilitzant la següent expressió:

$$r^2 = \frac{(\overline{xy} - \bar{x}\bar{y})^2}{(\overline{x^2} - \bar{x}^2)(\overline{y^2} - \bar{y}^2)} \quad (2.20)$$

En lloc d'ajustar una recta  $y = ax + b$  podríem haver ajustat  $x = \mu y + \lambda$ ;  $\mu$  vindria donat per (2.17) substituint  $x$  per  $y$ . Per tant  $r^2$  no és més que el producte  $a\mu$ . Si les dues rectes fossin idèntiques,  $\mu = 1/a$ , i per tant  $r = 1$ . De fet, es pot demostrar que  $r \in [0, 1]$  i que  $r = 1$  si i només si els  $k$  punts  $(x_i, y_i)$  estan alineats. Quant més proper a 1 sigui el valor de  $r$  millor és el nostre ajust. En la pràctica es considera un bon ajust quan  $r \geq 0.95$ , i es considera que no es pot ajustar una recta quan  $r \leq 0.8$ .

### 2.3.4 Errors dels coeficients a i b

A la recta li assignem una dispersió donada per les desviacions de les  $y_i$  respecte dels valors corresponents a la recta ajustada,  $ax_i + b$ :

$$s^2 = \frac{1}{k-2} \sum_{i=1}^k (y_i - ax_i - b)^2 = \frac{k}{k-2} (\overline{x^2} - \bar{x}^2) a^2 \left( \frac{1}{r^2} - 1 \right) \quad (2.21)$$

on la segona igualtat es pot obtenir substituint els valors de  $a$  i  $b$  i efectuant uns càlculs tediosos. El denominador  $f = k - 2$  s'anomena nombre de graus de llibertat. La raó de la presència de  $k - 2$  al denominador en lloc de  $k$  és deguda al fet de que les  $k$  desviacions  $y_i - ax_i - b$  no són independents, ja que verifiquen les dues equacions 2.17, 2.18, i per tant n'hi ha tan sols  $k - 2$  d'independents.

Finalment les dispersions que cal assignar als coeficients  $a$  i  $b$  es demostra en estadística que venen donades per:

$$s^2(a) = \frac{s^2}{k(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}, \quad s^2(b) = \overline{x^2} s^2(a) \quad (2.22)$$

Per a l'estimació de l'error accidental només cal aplicar les fórmules

$$\varepsilon_{ac}(a) = t_p(f) s(a), \quad \varepsilon_{ac}(b) = t_p(f) s(b) \quad (2.23)$$

on  $f = k - 2$ . Substituint a  $s^2(a)$  el valor de  $s^2$  obtenim fàcilment

$$\frac{s(a)}{a} = \sqrt{\frac{1}{k-2} \left( \frac{1}{r^2} - 1 \right)}, \quad (2.24)$$

és a dir, l'error relatiu del pendent de la recta depèn tan sols del nombre de punts i del coeficient de correlació.

Cal fer notar que si el pendent  $a$  és molt pròxim a zero, el mateix li passarà al coeficient de correlació  $r$  (ja que els dos tenen el mateix numerador,  $\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}$ ). En aquest cas els valors de  $y$  són independents de  $x$  i per tant no té sentit buscar una llei que els relacioni.

## 2.4 Taula de la distribució t de Student

Valors de la distribució $t_p(n)$ d'Student												
n	$t_{.995}$	$t_{.99}$	$t_{.98}$	$t_{.975}$	$t_{.95}$	$t_{.90}$	$t_{.80}$	$t_{.60}$	$t_{.50}$	$t_{.40}$	$t_{.20}$	$t_{.10}$
1	127.3	63.66	31.82	25.45	12.71	6.314	3.078	1.376	1.000	.7265	.3249	.1583
2	14.09	9.925	6.964	6.205	4.303	2.920	1.886	1.061	.8164	.6172	.2886	.1421
3	7.453	5.841	4.541	4.176	3.182	2.353	1.638	.9784	.7648	.5843	.2766	.1365
4	5.598	4.604	3.747	3.495	2.776	2.132	1.533	.9409	.7406	.5686	.2707	.1338
5	4.773	4.032	3.365	3.163	2.570	2.015	1.476	.9195	.7266	.5594	.2671	.1321
6	4.317	3.707	3.143	2.969	2.447	1.943	1.440	.9057	.7175	.5533	.2648	.1310
7	4.029	3.499	2.998	2.841	2.365	1.894	1.415	.8960	.7111	.5491	.2631	.1302
8	3.832	3.355	2.896	2.751	2.306	1.859	1.397	.8888	.7063	.5459	.2619	.1297
9	3.690	3.250	2.821	2.685	2.262	1.833	1.383	.8834	.7027	.5434	.2609	.1292
10	3.581	3.169	2.764	2.634	2.228	1.812	1.372	.8790	.6998	.5415	.2601	.1288
11	3.497	3.106	2.718	2.593	2.201	1.796	1.363	.8755	.6974	.5399	.2595	.1285
12	3.428	3.054	2.681	2.560	2.178	1.782	1.356	.8726	.6954	.5386	.2590	.1283
13	3.372	3.012	2.650	2.533	2.160	1.771	1.350	.8701	.6938	.5375	.2585	.1281
14	3.326	2.977	2.624	2.510	2.145	1.761	1.345	.8680	.6924	.5365	.2582	.1279
15	3.286	2.947	2.602	2.490	2.131	1.753	1.347	.8662	.6911	.5357	.2578	.1278
16	3.252	2.921	2.583	2.473	2.120	1.746	1.337	.8646	.6901	.5350	.2575	.1276
17	3.222	2.899	2.567	2.458	2.110	1.740	1.333	.8632	.6891	.5343	.2573	.1275
18	3.197	2.878	2.552	2.445	2.101	1.734	1.330	.8620	.6883	.5338	.2571	.1274
19	3.174	2.861	2.539	2.433	2.093	1.729	1.328	.8609	.6876	.5333	.2569	.1273
20	3.153	2.845	2.528	2.423	2.086	1.725	1.325	.8599	.6869	.5328	.2567	.1272
21	3.135	2.831	2.518	2.414	2.080	1.721	1.323	.8590	.6863	.5324	.2565	.1271
22	3.119	2.819	2.508	2.405	2.074	1.717	1.321	.8582	.6858	.5320	.2564	.1271
23	3.104	2.807	2.500	2.398	2.069	1.714	1.319	.8575	.6853	.5317	.2562	.1270
24	3.090	2.797	2.492	2.391	2.064	1.711	1.318	.8568	.6848	.5314	.2561	.1269
25	3.078	2.787	2.485	2.385	2.059	1.708	1.316	.8562	.6844	.5311	.2560	.1269
26	3.067	2.779	2.479	2.379	2.055	1.706	1.315	.8556	.6840	.5308	.2559	.1268
27	3.056	2.771	2.473	2.373	2.052	1.703	1.314	.8551	.6836	.5306	.2558	.1268
28	3.047	2.763	2.467	2.368	2.048	1.701	1.312	.8546	.6833	.5304	.2557	.1268
29	3.038	2.756	2.462	2.364	2.045	1.699	1.311	.8541	.6830	.5302	.2556	.1267
30	3.030	2.750	2.457	2.360	2.042	1.697	1.310	.8537	.6827	.5300	.2556	.1267
40	2.971	2.704	2.423	2.329	2.021	1.684	1.303	.8506	.6806	.5286	.2550	.1264
60	2.915	2.660	2.390	2.299	2.000	1.671	1.296	.8476	.6786	.5271	.2544	.1261
120	2.860	2.617	2.358	2.270	1.980	1.658	1.289	.8446	.6765	.5257	.2539	.1259
$\infty$	2.807	2.577	2.327	2.241	1.960	1.645	1.282	.8416	.6745	.5244	.2533	.1256

## Capítol 3

# Descripció de les pràctiques

### 3.1 Pràctica 1: Mesura de longituds i masses

L'objectiu d'aquesta pràctica és familiaritzar-se amb dos instruments molt comuns per a la mesura de longituds, el peu de rei i el palmer o cargol micromètric, i la balança per a mesurar masses.

#### 3.1.1 Peu de rei

Consta de dues parts: un regla fix dividit en mm y una part mòbil, denominada nonius. Si el nonius consta de 20 divisions que abasten 39 mm, una divisió del nonius valdrà  $39/20$  mm. La diferència entre dues divisions de la regla y una del nonius es la distancia més petita que podem apreciar; direm aleshores que la precisió del nostre aparell és de  $1/20$  mm, es a dir 0.05 mm.

El peu de rei permet efectuar mesures de longitud de tres tipus: exteriors mitjançant els braços llargs de la seva part inferior, interiors mitjançant els braços curts de la seva part superior i profunditats mitjançant la vareta d'un dels seus extrems. Per a efectuar una mesura es col·loca l'objecte entre els braços o s'ajusta la longitud de la vareta entre la vora i el fons de l'objecte. La marca "0" del nonius ens indica sobre l'escala principal el nombre de mm y les divisions del nonius ens indiquen la fracció. Per a determinar-la cal localitzar la divisió del nonius que millor coincideixi amb alguna de les de la regla principal. El seu nombre d'ordre indica el nombre de mitges dècimes que s'han d'afegir a la lectura anterior.

#### 3.1.2 Cargol micromètric o palmer

Un cargol micromètric consisteix en un cargol amb un pas de rosca constant "D", amb el seu cap dividit en  $n$  divisions, i d'una escala lineal fixa a la femella per on avança el cargol. Per cada volta que dona el cargol s'avança una longitud igual al pas de rosca, i per tant l'avenç de una divisió del cargol correspon a  $D/n$  mm (precisió).

Si el pas de rosca es de 0.5 mm i el cargol o tambor està dividit en 50 divisions, cada divisió correspondrà a 0.01 mm. Per a realitzar la mesura es col·loca el objecte a mesurar entre el cargol i l'extrem del palmer, i es fa girar el cargol fins que fa contacte amb l'objecte i resta travat. Per a garantir que l'objecte es sotmet sempre a la mateixa força es disposa de un embragatge a l'extrem del cargol micromètric. El cargol es fa avançar sempre gracies a l'anomenat embragatge, de forma que al fer contacte i superar un valor determinat de la força, l'embragatge entri en acció i deixi de arrossegar el cargol. En conseqüència es sotmet la peça a mesurar sempre a la mateixa força i s'assegura el bon estat de la rosca.

La mesura es realitza prenent com nombres enters de mm la divisió mes alta visible en l'escala lateral "M" afegint la longitud corresponent al nombre de divisions del tambor (divisions per

precisió). Abans de fer qualsevol mesura és important obtenir l'error de zero, es a dir, la lectura a distància zero. Aquesta quantitat haurà de sumar-se algebraicament a totes les mesures.

### 3.1.3 Descripció de la pràctica

1. Mitjançant el peu de rei determinar el volum d'un cos. S'efectuarà un croquis amb totes les mesures. Cada una d'aquestes mesures s'obtindrà com a mitjana de cinc mesures i anirà afectada del seu error instrumental i accidental. A continuació es determinarà el volum del cos. Es determinaran independentment l'error instrumental i la desviació típica de la mesura.
2. Mitjançant una balança digital es determinarà la massa del cos, i com a conseqüència la seva densitat. Donada la precisió del aparell emprat es determinarà únicament el seu error instrumental.
3. Es determinarà la densitat del cos i el seu corresponent error instrumental i accidental, amb una probabilitat del 95%.
4. Mitjançant el pàlmer s'obtindrà el diàmetre mig de les boles de la mostra. Prenguis una mesura per a cada bola, i obtinguis el valor mig. Representar gràficament la distribució de freqüències de les mesures. Es determinarà l'error accidental amb una probabilitat de 95%.

## 3.2 Pràctica 2: Llei de Hooke

La llei que segueix l'allargament d'una molla quan està sotmesa a una força  $F$  ve donada en una primera aproximació per la llei de Hooke:  $F = kx$ . Aquesta expressió indica que els allargaments són proporcionals a les forces que els causen.

Aquesta pràctica consisteix en calcular  $k$  mitjançant dos mètodes. Primer estàticament, comparant allargaments i forces. Després mitjançant un mètode dinàmic, a partir de la mesura del període d'oscil·lació.

### 3.2.1 Comprovació de la llei de Hooke

Es va fer servir el sistema experimental consistent en un recolzament vertical del qual penja una molla helicoidal. A més a més aquest té subjecte a la seva part inferior un platell on es van col·locar peses. Les mesures s'efectuaren de 25 en 25 grams. S'obtindran primer l'elongació sense carrega (zero inicial) i successivament s'aniran afegint masses de 25 g llegint per a cada una d'elles l'elongació en la regla graduada. Un cop arribats als 250 g repetir les mesures però decremantant les masses.

Amb aquestes dades dibuixar la gràfica pes-elongació i ajustar una recta als punts experimentals per el mètode de la recta de regressió. Les unitats de  $k$  seran pond/cm que convé expressar en N/m. 1 g pesa 1 pondi = 980 dinas =  $9.8 \cdot 10^{-3}$  N. Ja que  $F = k(l - l_0)$ , obtenim

$$l = \frac{1}{k}F + l_0 = aF + b, \quad \text{amb} \quad a = \frac{1}{k}.$$

Ajustant una recta als valors de  $l$  i  $F$  mesurats, podem calcular  $a$  i el corresponent error  $\varepsilon_{ac}(a)$  i deduïm fàcilment  $k$  i  $\varepsilon_{ac}(k)$ :

$$k = \frac{1}{a}, \quad \varepsilon_{ac}(k) = \frac{1}{a^2}\varepsilon_{ac}(a) = \frac{k}{a}\varepsilon_{ac}(a).$$

### 3.2.2 Mètode dinàmic

Aquest mètode es basa en considerar que una massa  $M$  subjecta a una molla de constant recuperadora  $k$  oscil·la amb un període donat per

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}$$

Per a determinar  $k$  es procedirà de la següent forma: Havent col·locat una massa  $m$  al platell, s'apartarà lleugerament de la posició d'equilibri i es deixarà anar. Esperar que hagi realitzat 3 oscil·lacions completes i procedir a mesurar el temps emprat a realitzar 10 oscil·lacions. Fer-ho per a masses de 50, 100, 150 i 200 g. Per a cadascuna de les masses es mesurarà el període tres vegades. Amb les dades obtingudes es dibuixarà la gràfica  $T^2, m$  el que permetrà obtenir el valor de la constant  $k$ .

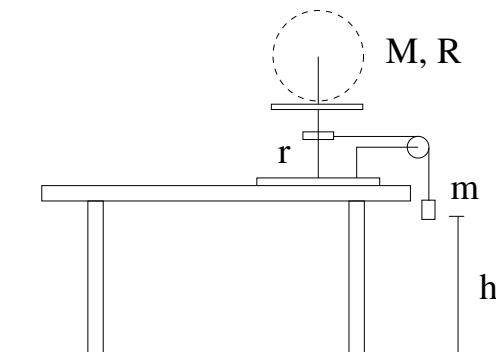
La constant  $k$  es determinarà ajustant una recta als valors experimentals. Aquesta recta no passa pel origen degut a que el platell o recolzament de les peces té una massa  $m_p$ , i la massa total penjada de la molla és  $m + m_p$ . Per tant,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k}m + \frac{4\pi^2 m_p}{k} = am + b, \quad a = \frac{4\pi^2}{k}$$

L'ordenada a l'origen  $b$  ens permetria determinar indirectament la massa del platell  $m_p$  (cosa que no farem a aquesta pràctica). El pendent de la recta  $a$  permet calcular  $k = 4\pi^2/a$ . Donat que  $T$  es mesura en segons i  $m$  en g,  $k$  vindrà donat en  $g/s^2$ . Aquest resultat ha de passar-se a  $N/m$  per comparar amb el valor obtingut en el apartat anterior.  $1 g/s^2 = 10^{-3} N/m$ . A partir de  $a$  de la recta de regressió es calcula immediatament  $\varepsilon_{ac}(k) = (k/a)\varepsilon_{ac}(a)$ .

### 3.3 Pràctica 3: Càlcul dels moments d'inèrcia d'un disc

El propòsit d'aquesta pràctica és el càlcul dinàmic del moment d'inèrcia d'un disc. La figura mostra el disc, de radi  $R$  i massa  $M$ , unit a un suport per un eix que pot girar lliurement. A l'eix hi ha una politja de radi  $r$  a la que hi ha lligat un fil de massa negligible que no llisca respecte de la politja. De l'altre extrem penja una massa  $m$  que es deixa anar des del repòs.



Les equacions per a aquest sistema són

$$\begin{aligned} ma &= mg - T \\ I\alpha &= rT \\ \alpha &= a/r \\ h &= at^2/2 \end{aligned}$$

amb  $a$  l'acceleració de la massa  $m$ ,  $T$  la tensió del fil,  $g$  l'acceleració de la gravetat,  $\alpha$  l'acceleració angular del disc,  $h$  la distància vertical recorreguda per la massa  $m$  i  $t$  el temps que triga en recórrer-la. Combinant aquestes equacions obtenim la relació entre  $m$  i  $t$

$$m = \frac{2hI}{r^2} \frac{1}{gt^2 - 2h}.$$

Per a tenir en compte els fregaments, de forma molt simplificada, suposarem que l'efecte que té es pot compensar penjant una massa  $m_0$ . D'aquesta manera la relació entre  $m$  i  $t$  és

$$m = m_0 + px \quad \text{amb} \quad p = \frac{2hI}{r^2} \quad \text{i} \quad x = \frac{1}{gt^2 - 2h}.$$

Veiem que si  $m$  és propera a  $m_0$  el temps que cal perquè caigui és fa molt gran. En el límit, quan  $m = m_0$ , el sistema no accelera. Aquesta darrera expressió permet ajustar una recta als valor tabulats de  $m$  i  $x = 1/(gt^2 - 2h)$ . L'ordenada a l'origen és  $m_0$  i el pendent val  $p = 2hI/r^2$  que permet obtenir  $I$  a partir de  $p$ ,  $h$  i  $r$ .

### 3.3.1 Descripció de la pràctica

Es calcularan, en primer lloc, els moments d'inèrcia de forma directa a partir de la massa i el radi del disc propagant els errors de resolució. Si  $I_e = MR^2/2$  llavors l'error de  $I_e$  és

$$\varepsilon(I_e) = \frac{1}{2} (R^2\varepsilon(M) + 2MR\varepsilon(R)).$$

Posteriorment es fixarà el disc a l'eix giratori i es penjaran diferents masses del suport per a deixar anar el sistema des del repòs, comptant el temps de caiguda des d'una altura fixada d'avant ma. Això es farà primer amb l'eix giratori coincidint amb l'eix del disc i, posteriorment, respecte d'un diàmetre. L'ajust de les dades a una recta proporcionarà els dos moments d'inèrcia que es compararan amb els obtinguts analíticament. Com que els moments d'inèrcia s'obtidran a partir de  $p = 2hI/r^2$  ( $I = pr^2/2h$ ), l'error es calcularà amb la següent equació:

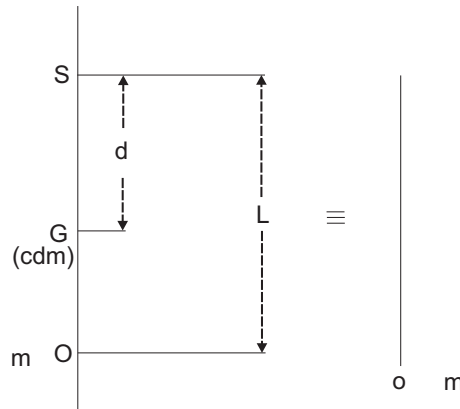
$$\varepsilon(I) = \frac{1}{2} \left( \frac{2rp}{h} \varepsilon(r) + \frac{r^2}{h} \sigma(p) + \frac{r^2 p}{h^2} \varepsilon(h) \right)$$

## 3.4 Pràctica 4: Pèndol reversible

L'objectiu de la pràctica consisteix en estudiar el funcionament del pèndol reversible i mesurar l'acceleració de la gravetat.

### 3.4.1 Fonamentació

Sigui un pèndol físic de massa  $m$  i centre de gravetat situat a  $G$ , que oscil·la en torn a un eix horitzontal que passa per  $S$ .



El seu període d'oscil·lació PER A PETITES OSCIL·LACIONS serà:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_s}{mgd}}$$

on  $I_s$  és el moment d'Inèrcia respecte de l'eix de suspensió S. Un pèndol ideal de longitud L tindrà un període

$$T = 2\pi \sqrt{L/g}$$

Per comparació amb l'expressió anterior observem que la longitud d'un pèndol ideal que tingués el mateix període que el pèndol físic vindrà donada per  $L = I_s/md$ . Aquesta longitud s'anomena longitud reduïda del pèndol físic i correspon a la distància entre el punt de suspensió S i el punt O, anomenat centre d'oscil·lació, al que hauríem de col·locar tota la massa del pèndol per tenir el mateix període d'oscil·lació.

Els centres d'oscil·lació i suspensió tenen la propietat d'ésser reversibles, és a dir, si suspenem el pèndol pel punt O el període és el mateix que si el suspenem pel punt S, i per tant S és el nou centre d'oscil·lació. Això implica que les longituds reduïdes per ambdós eixos són iguals, la qual cosa podem comprovar:

$$L_S = I_S/md^2 \qquad L_0 = I_0/m(L_S - d)$$

Aplicant el Teorema d'Steiner

$$I_S = I_G + md^2 \qquad I_0 = I_G + m(L_S - d)^2$$

i per tant

$$L_S = \frac{I_G + md^2}{md} = \frac{I_G}{md} + d \quad \rightarrow \quad d = \frac{I_G}{m(L_S - d)}$$

$$L_0 = \frac{I_G + m(L_S - d)^2}{m(L_S - d)} = \frac{I_G}{m(L_S - d)} + (L_S - d) = d + (L_S - d) = L_S$$

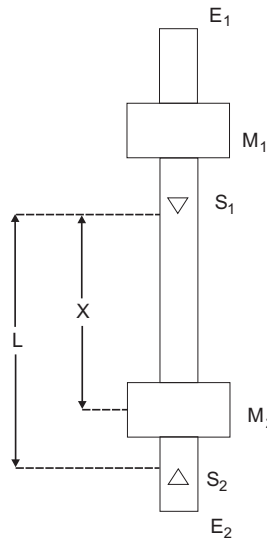
com volíem demostrar.

### 3.4.2 Descripció de la pràctica

La pràctica consisteix en determinar les posicions en que s'han de col·locar les dues masses  $M_1$  i  $M_2$  sobre una vareta de forma que els Centres d'oscil·lació i suspensió corresponguin amb els dos

punts prèviament determinats,  $S_1$  i  $S_2$ .

- Masses desplaçables:  $M_1, M_2$
- Punts de suspensió :  $S_1, S_2$
- Extrems del pèndol :  $E_1, E_2$
- Distàncies recomanades:
- $E_1M_1 = 1cm$
- $M_1S_1 = 11cm$
- $S_1S_2 = L = 50cm$
- $S_2E_2 = 4cm$

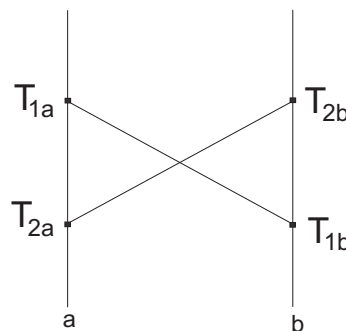


La condició de reversibilitat es troba quan els períodes de les oscil·lacions coincideixen. Donat que la distància entre els punts  $S_1$  i  $S_2$  (longitud reduïda) és de  $50cm$ , el pèndol oscil·larà amb un període de  $1.42 s$  en un lloc en que  $g = 9.81m/s^2$ .

NO OBLIDEU QUE LA TEORIA DESENVOLUPADA NOMES ES VÀLIDA EN EL CAS DE PETITES OSCIL·LACIONS. EN AQUEST SISTEMA LES OSCIL·LACIONS NO HAN DE SUPERAR MAI ELS 20 cm D'EXTREM A EXTREM.

### 3.4.3 Determinació del període de reversibilitat.

Ens cal trobar la intersecció de les corbes  $T_1$  i  $T_2$ . Per trobar el punt d'intersecció  $(x, T)$  dibuixarem dues rectes pels punts més propers a l'esmentada intersecció:



$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{T - T_{1a}}{T_{1b} - T_{1a}} = \frac{T - T_{2a}}{T_{2b} - T_{2a}}$$

El valor de  $T$  ve donat per:

$$T = \frac{T_{1a}T_{2b} - T_{2a}T_{1b}}{T_{2b} - T_{1b} + T_{1a} - T_{2a}}$$

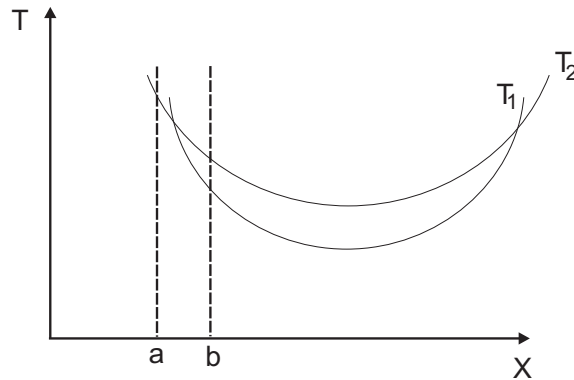
Es fàcil calcular que l'error corresponent serà:

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{D^4} \left( (T_{2b} - T_{1b})^2 (T_{2b} - T_{2a})^2 \sigma_{T_{1a}}^2 + (T_{1b} - T_{1a})^2 (T_{1b} - T_{2b})^2 \sigma_{T_{2a}}^2 \right) \quad (3.1)$$

$$+ (T_{2a} - T_{1a})^2 (T_{2a} - T_{2b})^2 \sigma_{T_{1b}}^2 + (T_{1a} - T_{1b})^2 (T_{1a} - T_{2a})^2 \sigma_{T_{2b}}^2 \quad (3.2)$$

on  $D = T_{2b} - T_{1b} + T_{1a} - T_{2a}$

A continuació podem veure una gràfica típica representant  $T_1$  i  $T_2$  en funció de  $x$ ; hem assenyalat amb  $a$  i  $b$  els valors de  $x$  més propers a una de les interseccions, tal com mostra ampliada la figura anterior.

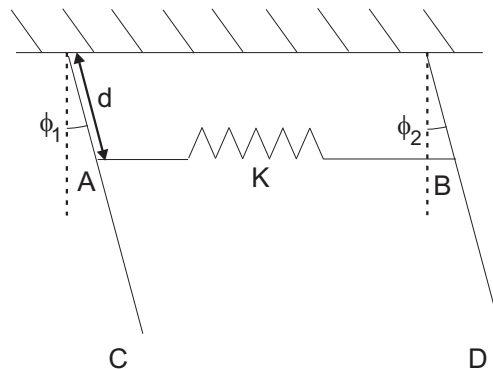


### 3.5 Pràctica 5: Pèndols acoblats

El propòsit d'aquesta pràctica és l'estudi de oscil·lacions acoblades mitjançant dos pèndols iguals.

#### 3.5.1 Equacions del moviment.

Considerem dos pèndols idèntics amb el seu centre de masses situat a una distància  $l$  del punt de suspensió. Cada pèndol està format per una vareta sobre la que pot lliscar una massa  $m$ . Les varetes estan unides entre si mitjançant un acoblament elàstic, que per a facilitar els càlculs assimilarem a una molla de constant  $k$ .



$$I \frac{d^2 \Phi_1}{dt^2} = -mgl \Phi_1 - D(\Phi_1 - \Phi_2)$$

$$I \frac{d^2 \Phi_2}{dt^2} = -mgl \Phi_2 + D(\Phi_1 - \Phi_2)$$

Sobre cada pèndol actua un moment degut al pes i un moment degut a la molla. Prenent com orígens d'angles les posicions per a les que els dos pèndols estan en equilibri, i si  $I$  és el moment

d'inèrcia respecte al punt de suspensió, aleshores tenim: on  $D = kd^2$  i hem aproximat  $\sin \phi = \phi$ . És fàcil comprovar per simple substitució que la solució ve donada per

$$\Phi_1 = a \sin(\omega t + \alpha) + b \sin(\gamma t + \beta)$$

$$\Phi_2 = a \sin(\omega t + \alpha) - b \sin(\gamma t + \beta)$$

on  $a, b, \alpha, \beta$  són constants que depenen de les condicions inicials i

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}} \quad \gamma = \sqrt{\frac{mgl + 2D}{I}}$$

Ens trobem amb un moviment en el que es superposen dues pulsacions. Observem que  $\omega$  és la pulsació que tindria cada pèndol sense acoblar, en canvi  $\gamma$  depèn del acoblament. Com podem determinar experimentalment  $\omega$  i  $\gamma$  al laboratori? La solució està en triar les condicions inicials adequades per aconseguir un moviment en el que només intervingui una de les freqüències. Variant les condicions inicials podem estudiar tres casos interessants.

- Oscil·lacions en el mateix sentit. Si posem  $b=0$  a la solució obtinguda, observem que  $\Phi_1 = \Phi_2 = a \sin(\omega t + \alpha)$ , és a dir que ambdós pèndols oscil·len exactament igual, amb la mateixa posició i velocitat en cada moment. Per aconseguir aquesta situació cal desplaçar ambdós pèndols en el mateix sentit i abandonar-los a si mateixos. Ambdós pèndols es comportaran com si no estiguessin acoblats, oscil·lant amb una freqüència de un oscil·lador aïllat. El període d'oscil·lació serà  $T_\omega = 2\pi/\omega$ .
- Oscil·lacions en sentits contraris. Si posem  $a = 0$  en la solució obtinguda, veiem que  $\Phi_1 = -\Phi_2 = b \sin(\gamma t + \beta)$ , és a dir que ambdós pèndols es mouen amb posicions i velocitats exactament oposades. Per aconseguir aquesta situació cal desplaçar ambdós pèndols en sentits oposats i abandonar-los a si mateixos. En aquest cas el període depèn del acoblament entre ambdós pèndols i val  $T_\gamma = 2\pi/\gamma$ . Veiem que  $T_\gamma < T_\omega$  degut a que  $\gamma > \omega$ .
- Oscil·lacions polsants. Si posem  $b = -a$ ,  $\alpha = -\pi/2$ ,  $\beta = \pi/2$  obtenim la següent solució:

$$\Phi_1 = a \sin\left(\frac{\gamma - \omega}{2}t\right) \sin\left(\frac{\gamma + \omega}{2}t\right)$$

$$\Phi_2 = a \cos\left(\frac{\gamma - \omega}{2}t\right) \cos\left(\frac{\gamma + \omega}{2}t\right)$$

Veiem que per a  $t=0$  ambdós pèndols tenen velocitat nul·la,  $\Phi_1 = 0$  i  $\Phi_2 = a$ . Aquest moviment podem obtenir-lo doncs desplaçant un dels pèndols, mantenint fixe l'altre i abandonar-los a si mateixos. Si el acoblament és petit ( $D < mgl$ ),  $\gamma \simeq \omega$  i  $\gamma - \omega \ll \gamma + \omega$ . Per tant el primer factor varia lentament i el segon ràpidament. Es tracta doncs d'un moviment de freqüència  $(\gamma + \omega)/2$  l'amplitud del qual varia lentament amb el temps amb una freqüència  $(\gamma - \omega)/2$ . S'ha de notar que les amplituds de  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$  estan desfasades  $\pi/2$  i per tant l'energia es transmet lentament d'un pèndol a l'altre amb freqüència  $(\gamma - \omega)/2$ .

Per a reproduir els fenòmens més amunt indicats, les hipòtesis inicials han de complir-se experimentalment. Això fa que es tingui que ajustar les masses dels dos pèndols per que ambdós tinguin el mateix període d'oscil·lació. A més tota la teoria s'ha desenvolupat suposant petites oscil·lacions i que aquestes es realitzen a un únic pla. És també important que els punts per on acoblem els pèndols (A i B a la figura) estiguin a la mateixa distància del punt de suspensió.

### 3.5.2 Descripció de la pràctica

1. S'ajustarà la posició de les masses sobre les varetes a fi d'aconseguir que ambdós pèndols tinguin el mateix període ( sense acoblament ). Es mesuraran tres vegades cada període, contant 10 oscil·lacions cada vegada, i s'ajustarà la posició de la massa inferior del segon pèndol (D a la figura), si es necessari, per obtenir el mateix període. S'anotaran els valors corregits del segon període. Recordem que  $\omega = 2\pi/T$  ,  $\sigma_\omega = (\omega/T)\sigma_T$ .
2. Es posaran el pèndols a oscil·lar en el mateix sentit, i es mesuraran la freqüència. Es mesurarà tres vegades el període de cada pèndol, contant 10 oscil·lacions.
3. Mesura de  $\gamma$  , fent oscil·lar ambdós pèndols en sentits oposats. Es mesurarà tres vegades el període de cada pèndol, contant 10 oscil·lacions. En 2) i 3) els períodes de  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$  han de ser pràcticament iguals. Si no ho són, es degut a que les condicions inicials no s'han pres correctament, i convé repetir la mesura.
4. Observació de les pulsacions, i mesura de les freqüències  $\omega_o = (\gamma + \omega)/2$  i  $\omega_p = (\gamma - \omega)/2$ . Es mesurarà primer el període de les oscil·lacions d'un dels pèndols ( que ens donarà  $\omega_o$  ), i després el període de les pulsacions ( 4 vegades el temps en que es transfereix la energia d'un pèndol a l'altre, o dues vegades el temps entre dues parades consecutives del mateix pèndol); a partir d'aquest darrer període calcularem  $\omega_p$ . Finalment compararem  $\omega_o$  i  $\omega_p$  amb els valors prèviament obtinguts de  $(\gamma + \omega)/2$  i  $(\gamma - \omega)/2$ .

## 3.6 Pràctica 6: Canal de Galileu

La pràctica a realitzar consta de dues parts. A la primera d'elles s'estudiarà cinemàticament, a partir de les dades experimentals, el moviment d'una partícula en els casos de moviment rectilini uniforme i de moviment uniformement accelerat. A la segona part es valorarà la discrepància entre les dades experimentals i les prediccions teòriques.

Per a la realització de la pràctica es disposa d'un canal de Galileo, una rampa de fusta, un cronòmetre, un suport i dues boles d'acer de diferents diàmetre i massa.

### 3.6.1 Cinemàtica

1. Moviment uniforme: Col·locat el canal de Galileo horitzontalment, es deixa caure una bola per la ranura de la rampa. D'aquesta forma la bola entra en el canal amb una certa velocitat inicial. Amb el cronòmetre es mesura el temps que triga la bola a recórrer les distàncies marcades (25, 50, 75, 100, 125 i 150 cm), començant a contar el temps a l'instant en que la bola entra al canal. Es faran al menys 5 mesures de temps per a cada longitud, assignant-se a cada distància el valor mig dels temps respectius. Aquest procés es farà per a cada una de les boles d'acer disponibles.

Nota: Per a la realització correcta de la pràctica es necessari deixar anar la bola sempre des de la mateixa alçària, a fi que la velocitat en el canal sigui sempre la mateixa.

Amb les dades obtingudes es confeccionarà la gràfica espai-temps i a partir d'aquesta s'obté la velocitat de cadascuna de les boles. Les gràfiques que s'obtinguin hauran de ser rectes pel que, en principi, es possible considerar que es compleix la relació  $e = vt$ . Trobar el valor de  $v$  per a cada un dels parells  $(e, t)$ . Són molt dispars entre sí?

2. Moviment uniformement accelerat: Es col·locarà el canal de Galileo sobre el suport de forma que tingui una lleugera inclinació respecte a la horitzontal. Es procedirà deixant anar la bola des de l'inici del canal sense velocitat inicial. Com abans es prendran al menys 5 mesures de

temps per a cada distància. Com en el cas anterior es confeccionaran les gràfiques espai-temps corresponents. En aquest cas les corbes no poden considerar-se rectes. És possible considerar una relació del tipus  $e = 1/2at^2$  ? Determinar la velocitat a cadascun dels punts  $v = at$ .

### 3.6.2 Balanç energètic

Suposant que al desplaçar-se, les dues boles roden sense lliscar, establir un balanç de energies i estudiar la energia perduda per fregament. En el cas del moviment uniforme, el balanç d'energies serà:

$$E_{total} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

suma de les energies cinètiques de translació i de rotació. Així podem calcular la diferència d'energies totals entre dos punts i determinar d'aquesta forma l'energia perduda per fregaments.

En el cas del moviment uniformement accelerat podem establir un balanç d'energies entre el principi i el final del recorregut de la bola. A l'instant inicial la bola només té energia potencial i al final només energia cinètica.

$$E_{inicial} = mgh$$

$$E_{final} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Per una esfera massissa uniforme de radi  $R$  que roda sense lliscar,  $\omega = v/R$  i  $I = 2/5mR^2$ , amb això s'obté

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{7}{10}mv^2$$

Observació: La massa de les boles es determinarà amb una balança de precisió del laboratori.