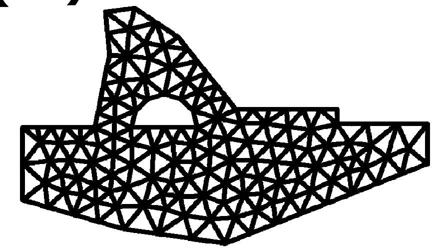
Introducción al método de los elementos finitos

Métodos Numéricos 2

Laboratori de Càlcul Numèric (LaCàN)
Dep. de Matemàtica Aplicada III
Universitat Politècnica de Catalunya
www-lacan.upc.es

Ventajas del método de los elementos finitos (EF)

- Mallas no estructuradas: dominios con contornos irregulares, adaptatividad

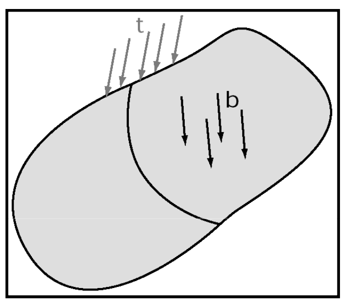


- Las condiciones de contorno se imponen de forma sistemática (sin casuística)
- Programas de EF con rutinas generales: cálculo sistemático de todo, describiendo de forma adecuada los datos del problema (geometría, condiciones de contorno...) un solo código de EF permite resolver varios problemas de contorno.

Problema mecánico (I)
Principio de los trabajos virtuales

$$\boxed{\begin{array}{ll} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} & \text{en } \Omega \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_d & \text{en } \Gamma_d \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{t} & \text{en } \Gamma_n \end{array}}$$

$$\boxed{\Gamma_d \cup \Gamma_n = \partial \Omega}$$



$$\boxed{\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) \, d\Omega = \int_\Omega \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{b} + \int_{\Gamma_n} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t} \, d\Gamma}$$

para cualquier desplazamiento virtual v (con v=0 en Γ_d)

Problema mecánico (II)
Residuos ponderados

- Ecuación de equilibrio

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{b} = 0}$$

- Premultiplicando por v tal que v=0 en Γ_d

$$\boxed{-\int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega = \int_\Omega \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{b} \, d\Omega}$$

- Considerando $\boxed{\nabla \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \nabla \boldsymbol{v} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})}$

$$\boxed{\int_\Omega \nabla \boldsymbol{v} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_\Omega \nabla \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega = \int_\Omega \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{b} \, d\Omega}$$

- Utilizando el teorema de la divergencia de Gauss

$$\boxed{\int_\Omega \nabla \boldsymbol{v} : \boldsymbol{\sigma}\, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}\, d\Gamma = \int_\Omega \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{b}\, d\Omega}$$

$$\boxed{\int_\Omega \nabla \boldsymbol{v} : \boldsymbol{\sigma}\, d\Omega - \int_{\Gamma_d} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}\, d\Gamma = \int_\Omega \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{b}\, d\Omega + \int_{\Gamma_n} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t}\, d\Gamma}$$

- Dado que v=0 en Γ_d, $\sigma \cdot$n=t en Γ_n y σ es un tensor simétrico

$$\boxed{\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{\sigma}\, d\Omega = \int_\Omega \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{b}\, d\Omega + \int_{\Gamma_n} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t}\, d\Gamma}$$

Residuos ponderados

- Problema modelo

Forma fuerte

$$\boxed{\begin{array}{rcll} -\nabla \cdot (\mathbf{A} \nabla u) & = & f & \text{en } \Omega \\ u & = & u_d & \text{en } \Gamma_d \\ (\mathbf{A} \nabla u) \cdot \boldsymbol{n} & = & g_n & \text{en } \Gamma_n \end{array}}$$

con $\boxed{\partial\Omega = \Gamma_d \cup \Gamma_n}$

- Premultiplicando por una función de test v tal que v=0 en Γ_d

$$\boxed{-\int_\Omega v\ \nabla \cdot (\mathbf{A} \nabla u)\, d\Omega = \int_\Omega v f\, d\Omega}$$

- utilizando $\boxed{\nabla \cdot (v \mathbf{A} \nabla u) = \nabla v \cdot (\mathbf{A} \nabla u) + v\ \nabla \cdot (\mathbf{A} \nabla u)}$

$$\boxed{\int_\Omega \nabla v \cdot (\mathbf{A} \nabla u)\, d\Omega - \int_\Omega \nabla \cdot (v \mathbf{A} \nabla u)\, d\Omega = \int_\Omega v f\, d\Omega}$$

- aplicando el teorema de la divergencia de Gauss

$$\boxed{\int_\Omega \nabla v \cdot (\mathbf{A} \nabla u)\, d\Omega - \int_{\partial\Omega} v\ (\mathbf{A} \nabla u) \cdot \boldsymbol{n}\, d\Gamma = \int_\Omega v f\, d\Omega}$$

- dado que v=0 en Γ_d y u·n=g_n en Γ_n

$$\boxed{\int_\Omega \nabla v \cdot (\mathbf{A} \nabla u)\, d\Omega = \int_\Omega v f\, d\Omega + \int_{\Gamma_n} v g_n\, d\Gamma}$$

Forma débil

- "Encontrar u$\in H^1(\Omega)$ tal que u=u_d en Γ_d y

$$\boxed{a(v,u) = l(v)}$$

para cualquier función de test v$\in H^1(\Omega)$ tal que v=0 en Γ_d" , donde

Bilineal, simétrica y coerciva

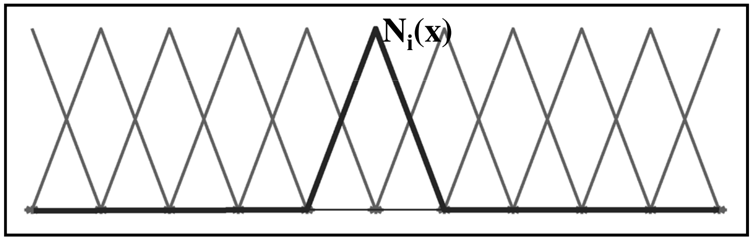
$$\boxed{\begin{array}{l} a(v,u) = \displaystyle\int_\Omega \nabla v \cdot (\mathbf{A} \nabla u)\, d\Omega \\ l(v) = \displaystyle\int_\Omega v f\, d\Omega + \int_{\Gamma_n} v g_n\, d\Gamma \end{array}}$$

- Es fácil demostrar que la forma fuerte y la forma débil son equivalentes.

Interpolación seccional (Spline)

- Se considera una interpolación seccional (lineal C^0, cúbica C^1,...)

$$\boxed{u(x) \simeq u^h(x) = \sum_i u_i N_i(x)}$$



- Ventajas:
  - soporte compacto (bases locales) $\Rightarrow$ matrices casi-vacías
  - fácilmente integrable
  - coeficientes u_i con significado físico

Valores prescritos

- Se fijan los coeficientes que corresponden a valores conocidos por las condiciones de contorno esenciales

$$\boxed{u^h(x) = \sum_{j \notin \mathcal{B}} u_j N_j(x) + \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{B}} u_d(x_i) N_i(x)}_{\psi(x)}}$$

  - $u^h(x)$ verifica (salvo error asociado a la interpolación) la condición de contorno esencial $u=u_d$ en Γ_d
  - $N_i(x)=0$ en Γ_d para $i \notin B$ (funciones de test v)
- Existen otras técnicas: multiplicadores de Lagrange, métodos de penalización, método de Nitsche...

Discretización de la forma débil

- Imponiendo la forma débil para $v=N_i(x)$ con $i \notin B$ y sustituyendo la interpolación $u^h(x)$

$$\boxed{a(\ N_i\ ,\ \sum_j u_j N_j + \psi\ ) = l(N_i)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sum_j a(N_i, N_j)\ u_j = l(N_i) - a(N_i, \psi)}$$

- Sistema lineal de ecuaciones $\boxed{\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}}$

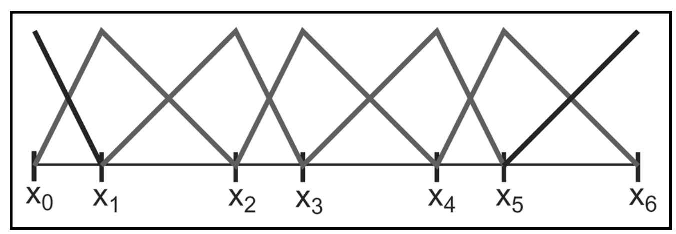
$$K_{ij} = a(N_i, N_j) = \int_\Omega \nabla N_i \cdot (\mathbf{A} \nabla N_j)\ d\Omega$$

$$f_i = l(N_i) - a(N_i, \psi) = \int_\Omega N_i f\ d\Omega + \int_{\Gamma_n} v g_n\ d\Gamma - a(N_i, \psi)$$

Ejemplo 1D (con spline lineal C^0)

$$\boxed{\begin{gathered} -u'' = f \text{ para } x \in [a,b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{gathered}} \Rightarrow \boxed{\int_a^b v'u'\ dx = \int_a^b vf\ dx}$$

- Interpolación: $\boxed{u(x) \simeq u^h(x) = \sum_{j=1}^{5} u_j N_j(x)}$



- Sustituyendo la aproximación y $v=N_i$ para $i=1...5$

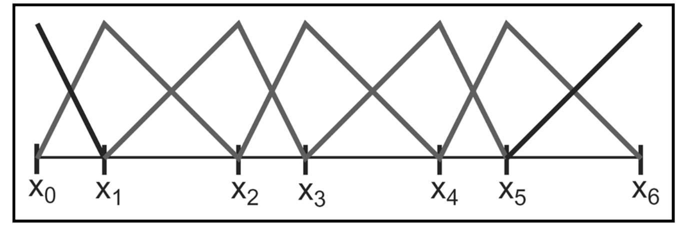
$$\boxed{\int_a^b N_i' \left(\sum_{j=1}^{5} u_j N_j' \right) \, dx = \int_a^b N_i f \, dx \quad i=1,\ldots,5}$$

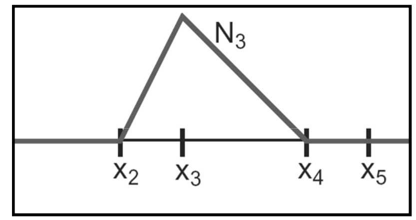
o, equivalentemente,

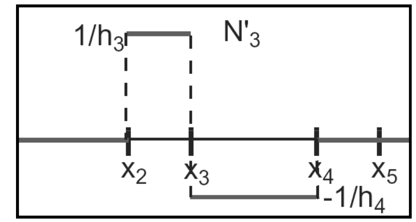
$$\boxed{\sum_{j=1}^{5} \left(\int_a^b N_i' N_j' \, dx \right) u_j = \int_a^b N_i f \, dx \quad i=1,\ldots,5}$$

- Sistema lineal 5×5: $\boxed{\mathbf{Ku} = \mathbf{f}}$

$$\boxed{K_{ij} = \int_a^b N_i' N_j' \, dx, \quad f_i = \int_a^b N_i f \, dx}$$







- La matriz del sistema es **tridiagonal** (en general es una matriz con pocos coeficientes no nulos)

$$\boxed{K_{ij} = \int_a^b N_i' N_j' \, dx = 0 \text{ para } |i-j| > 1}$$

$$\boxed{\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) & -\frac{1}{h_2} & & & \\ -\frac{1}{h_2} & \left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) & -\frac{1}{h_3} & & \\ & -\frac{1}{h_3} & \left(\frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}\right) & -\frac{1}{h_4} & \\ & & -\frac{1}{h_4} & \left(\frac{1}{h_4} + \frac{1}{h_5}\right) & -\frac{1}{h_5} \\ & & & -\frac{1}{h_5} & \left(\frac{1}{h_5} + \frac{1}{h_6}\right) \end{pmatrix}}$$

Matriz simétrica y diagonalmente dominante:

matriz **simétrica y definida positiva**

- Si la forma bilineal a(·,·) es simétrica y coerciva, la matriz resultante es simétrica y definida positiva.
- El coeficiente (i,j) de la matriz es no nulo sólo si los nodos i y j pertenecen al mismo elemento: matrices casi-vacías

Cálculo de integrales: cuadratura compuesta

- Hay que calcular integrales

$$\boxed{K_{ij} = a(N_i, N_j) = \int_\Omega \nabla N_i \cdot (\mathbf{A} \nabla N_j) \, d\Omega}$$

con funciones polinómicas a trozos (un polinomio en cada elemento)

- Se usa una **cuadratura de Gauss compuesta** (cuadratura de Gauss en cada elemento)

$$\boxed{K_{ij} = \sum_e \int_{\Omega_e} \nabla N_i \cdot (\mathbf{A} \nabla N_j) \, d\Omega = \ldots}$$

Matrices elementales

- Ensamblado de matrices elementales

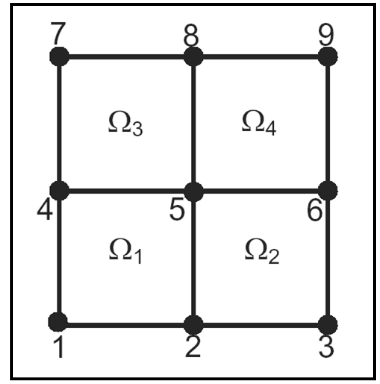
$$\mathbf{K} = \mathop{\mathsf{A}}_{e} \mathbf{K}^e, \quad \mathbf{f} = \mathop{\mathsf{A}}_{e} \mathbf{f}^e$$

- La matriz elemental $\mathbf{K}^e$ contiene la contribución del elemento Ω_e a la matriz total

$$K^e_{(i)(j)} = \int_{\Omega_e} \nabla N_{(i)} \cdot (\mathbf{A} \nabla N_{(j)}) \, d\Omega \qquad \begin{array}{l}(i) = 1, \ldots, \texttt{nnode} \\ (j) = 1, \ldots, \texttt{nnode}\end{array}$$

donde (·) denota **número** de nodo **local** y nnode es el número de nodos del elemento. La matriz de conectividades da la correspondencia entre número de nodo local y número global.

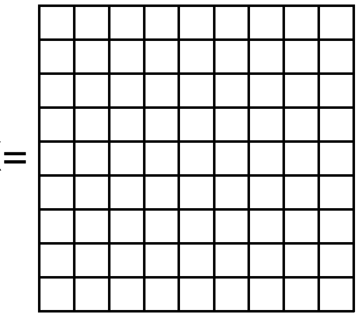
Ejemplo

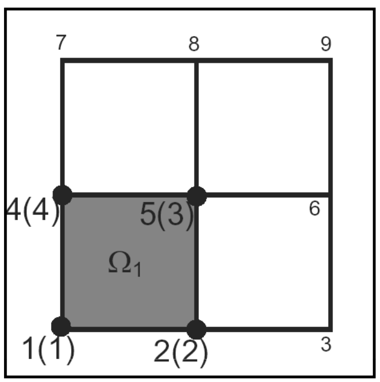


Definición de la geometría

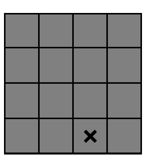
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 8 & 7 \\ 5 & 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \\ 1 & 0{,}5 \\ 0 & 1 \\ 0{,}5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

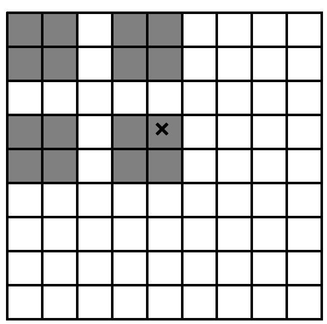
(matriz de conectividades)

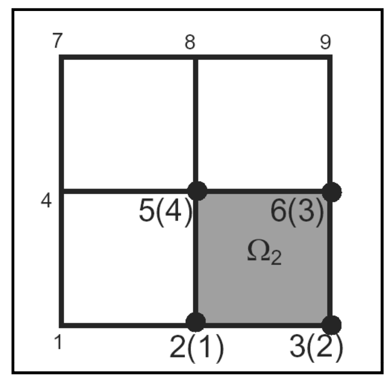
K=


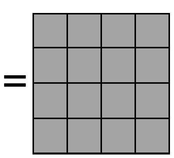


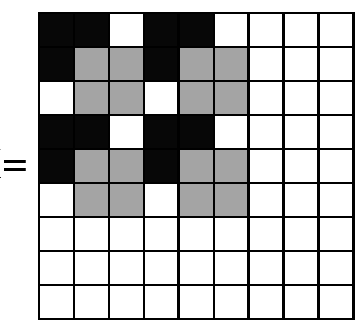
(#) numeración local

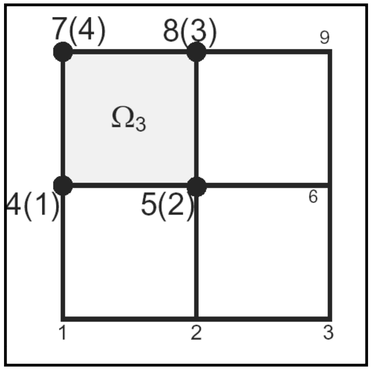
K^1=


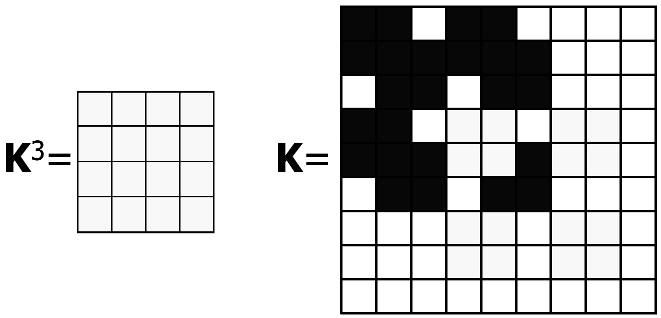
K=


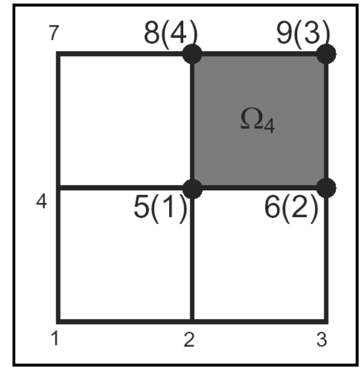


K^2=


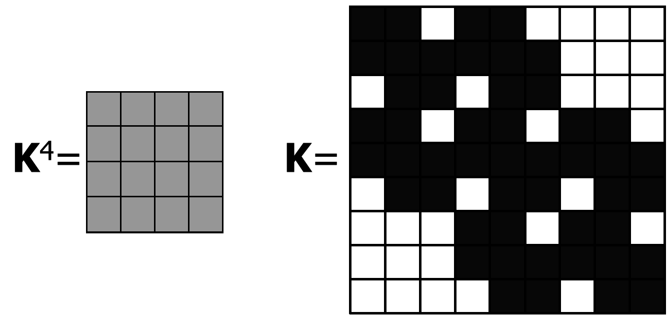
K=






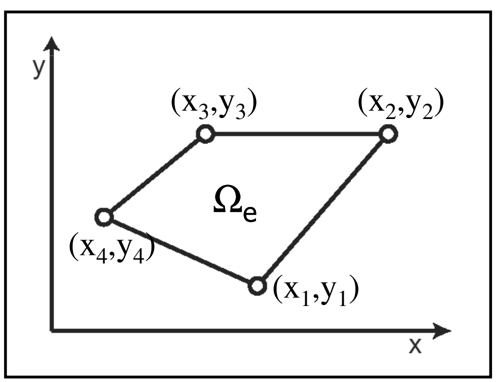


Matriz simétrica y semidefinida positiva (falta imponer valores prescritos)



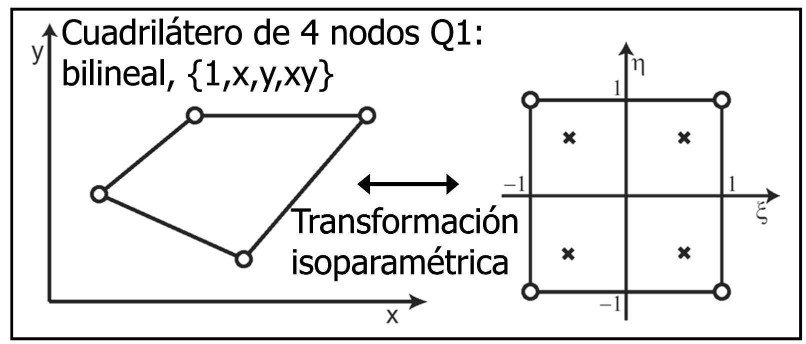
Cálculo de la matriz elemental

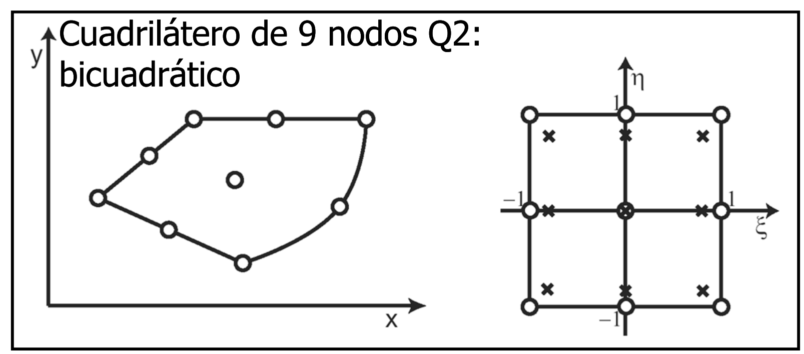
$$K^e_{(i)(j)} = \int_{\Omega_e} \nabla N_{(i)} \cdot \left(\mathbf{A} \nabla N_{(j)}\right) \, d\Omega \qquad \begin{array}{l} (i) = 1, \dots, \texttt{nnode} \\ (j) = 1, \dots, \texttt{nnode} \end{array}$$



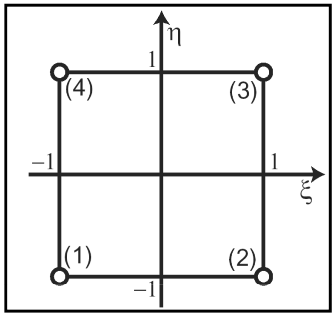
- Funciones de forma
  $N_i(x)$=?
- Cuadratura numérica

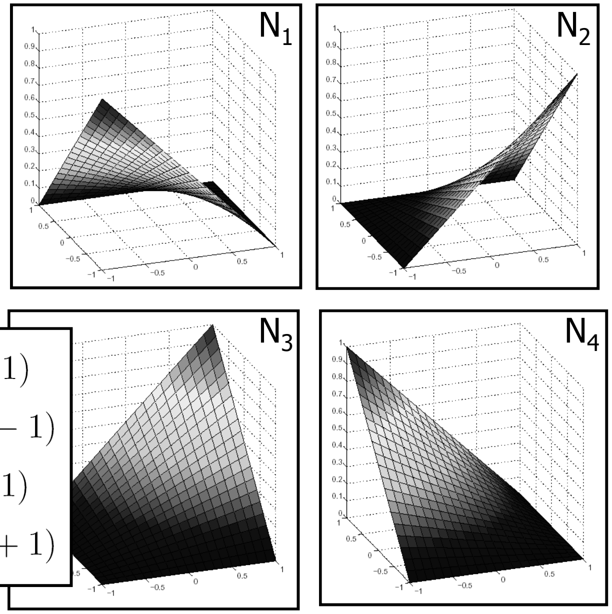
Elemento de referencia





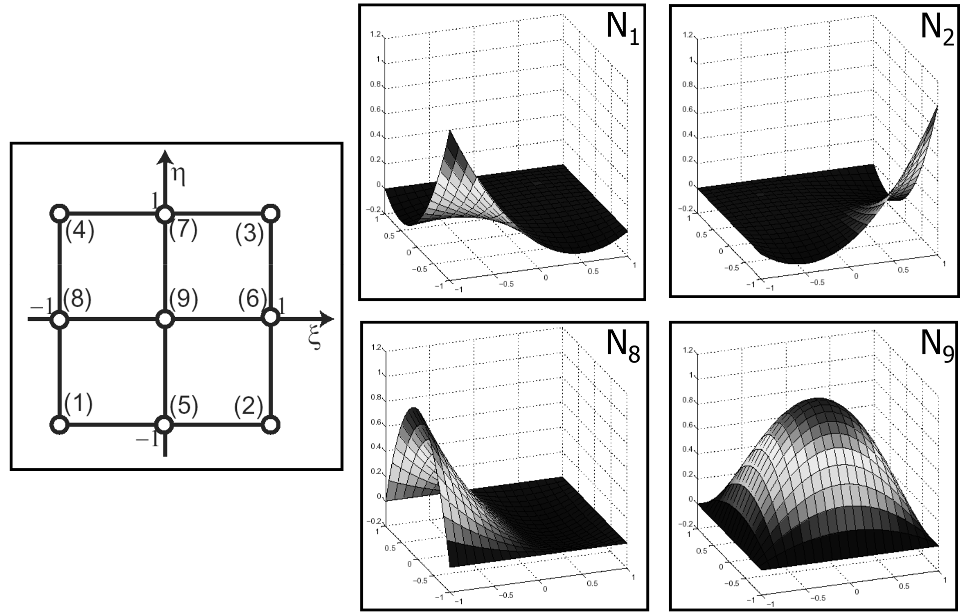
Elemento bilineal Q1



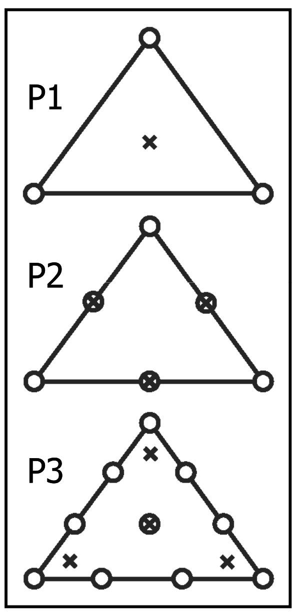


$$N_1(\xi,\eta) = \tfrac{1}{4}(\xi-1)(\eta-1)$$
$$N_2(\xi,\eta) = -\tfrac{1}{4}(\xi+1)(\eta-1)$$
$$N_3(\xi,\eta) = \tfrac{1}{4}(\xi+1)(\eta+1)$$
$$N_4(\xi,\eta) = -\tfrac{1}{4}(\xi-1)(\eta+1)$$

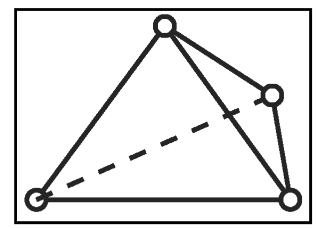
Elemento bicuadrático Q2



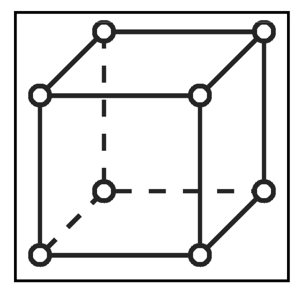
- **Triángulos**:
  - Coordenadas de área
  - Puntos de integración específicos para triángulos
  - Interpolación lineal (P1, {1, x, y}), cuadrática (P2, {1, x, y, xy, x^2, y^2}) ...



Tetraedro de 4 nodos lineal
{1, x, y, z}



Hexaedro de 8 nodos trilineal
{1, x, y, z, xy, xz, yz, xyz}



Observaciones finales

Para realizar los cálculos sólo es necesario definir:

- Forma débil del problema de contorno
- La geometría o malla de elementos finitos:
  - coordenadas nodales X
  - conectividades T
- El elemento de referencia:
  - puntos y pesos de integración (cuadratura de Gauss)
  - valor de las funciones de forma y derivadas en los puntos de integración