

Integración numérica

Laboratori de Càlcul Numèric (LaCàN)

Versión 1.0
8 de julio de 2011

Índice

1. Conceptos generales	3
1.1. Introducción	3
1.2. Planteamiento general	4
1.3. Clasificación y definiciones	7
2. Integración de Newton-Cotes	10
2.1. Introducción	10
2.2. Fórmulas cerradas de Newton-Cotes	10
2.3. Fórmulas abiertas de Newton-Cotes	15
2.4. Técnicas de mejoras de la integración numérica	19
2.4.1. Combinación de fórmulas simples	19
2.4.2. Fórmulas compuestas	21
2.4.3. Extrapolación de Richardson	25
2.4.4. Integración de Romberg	27
3. Integración de Gauss	31
3.1. Planteamiento del problema	31
3.2. Clasificación	34
3.3. Fórmulas de Gauss-Legendre	35
3.4. Fórmulas de Gauss-Laguerre	37
3.5. Fórmulas de Gauss-Hermite	38
3.6. Fórmulas de Gauss-Chebyshev	40

1. Conceptos generales

1.1. Introducción

La integración numérica es de gran importancia en ciencias aplicadas e ingeniería. Sus aplicaciones van desde cálculo de la capacidad de un pantano a partir de datos topográficos en el ámbito de la ingeniería civil, hasta la estimación de la fuerza total ejercida por el aire sobre las alas de un avión en ingeniería aeronáutica. En todas estas aplicaciones el objetivo es calcular una integral *definida*

$$I = \int_a^b f(x) dx, \quad (1)$$

con la mayor precisión y el menor coste computacional posibles. A pesar de este amplio rango de aplicaciones, es lícito preguntarse porqué es necesario realizar numéricamente el cálculo de la integral (1). La respuesta a esta pregunta es muy simple: no siempre es factible calcular analíticamente una integral. Por ejemplo, en muchas aplicaciones se desconoce la expresión analítica de la función que se debe integrar y sólo se conoce su valor en unos puntos $\{(x_i, f(x_i)), i = 0, \dots, n\}$. Es más, existen varios casos en los que, incluso existiendo una expresión analítica de la integral (1), es más eficiente realizarla numéricamente. A continuación se presentan dos ejemplos que muestran algunas de las limitaciones computacionales de la integración analítica.

- En determinadas ocasiones el resultado analítico de la integral definida (1) es una expresión bastante complicada, como por ejemplo,

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^4} dt = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\arctan \frac{x}{\sqrt{2} - x} + \arctan \frac{x}{\sqrt{2} + x} \right).$$

Nótese que calcular repetidamente esta integral puede ser muy caro desde el punto de vista computacional, ya que en la expresión anterior aparece una vez la función logaritmo y dos veces la función arco tangente cuyo coste computacional es muy superior al de una suma o un producto. Además, en las implementaciones numéricas incluso estas funciones se calculan aproximadamente. Por último, se debe observar que las funciones $\log(x)$ y $\arctan(x)$ pueden estar indeterminadas para ciertos valores de x . Por lo tanto, en estos casos también será preciso desarrollar alguna expresión aproximada al valor exacto de la función.

- A veces el resultado de la integral (1) no admite una representación analítica que pueda expresarse mediante un número finito de términos, como por ejemplo

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x} dx = 2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots \right).$$

Obsérvese que si la serie infinita anterior se aproxima mediante la suma de un número finito de términos también se comete un error de truncamiento que en algunos casos, puede ser muy importante. Por consiguiente, también es necesario desarrollar un método numérico para calcular este tipo de integrales.

1.2. Planteamiento general

La estrategia usual para obtener fórmulas que permitan calcular numéricamente la integral (1) se fundamenta en la interpolación numérica. Básicamente consiste en aproximar la función a integrar mediante un polinomio que pasa por una serie de puntos base $\{(x_i, f(x_i)), i = 0, \dots, n\}$ y posteriormente integrar el polinomio. Es decir,

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad (2)$$

donde $P_n(x)$ es el polinomio interpolador de grado n y $R_n(x)$ es el error de interpolación. En general, el polinomio interpolador puede escribirse como

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i N_i(x),$$

donde los coeficientes c_i pueden expresarse como una combinación lineal de los valores de la función en los puntos base, $f(x_i), i = 1, \dots, n$ y $N_i(x)$ representa el i -ésimo término de una base de polinomios (polinomios de Lagrange, Newton, ...). Por lo tanto, la integral (1) puede expresarse como

$$\begin{aligned} I = \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b P_n(x) dx + \int_a^b R_n(x) dx \\ &= \int_a^b \sum_{i=0}^n c_i N_i(x) dx + \int_a^b R_n(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^n c_i \int_a^b N_i(x) dx + \int_a^b R_n(x) dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Concretamente, si se realiza una interpolación de Lagrange, entonces

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x),$$

donde $L_i(x)$ es el i -ésimo polinomio de Lagrange

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad i = 0, \dots, n. \quad (4)$$

Es decir,

$$\begin{aligned} c_i &= f(x_i) & i &= 0, \dots, n \\ N_i(x) &= L_i(x) & i &= 0, \dots, n. \end{aligned}$$

Además, en este caso el error de interpolación es

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\mu)}{(n+1)!} L(x) \quad \mu \in [a, b],$$

donde $L(x)$ es el polinomio de Lagrange

$$L(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j). \quad (5)$$

Recuérdese que en realidad el valor μ depende del punto en que se evalúa el polinomio interpolador, es decir, $\mu = \mu(x)$. Sustituyendo estos resultados en la expresión (3) se obtiene

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i(x) dx + \int_a^b R_n(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\mu) L(x) dx, \quad (6) \end{aligned}$$

donde los puntos en los que se evalúa la función, $\{x_i, i = 0, \dots, n\}$, se denominan *puntos base de integración* y los valores $w_i, i = 0, \dots, n$ se denominan *pesos de integración* y valen

$$w_i = \int_a^b L_i(x) dx.$$

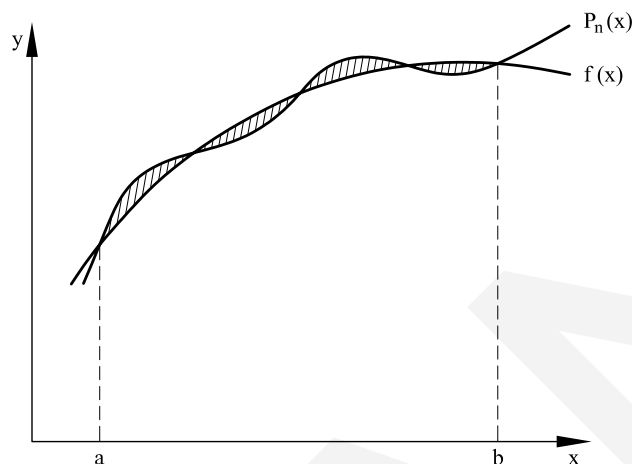


Figura 1: Representación gráfica del error de integración. En línea continua se representa la función $f(x)$ mientras que el polinomio interpolador, $p_n(x)$, se representa en línea discontinua.

Observación 1. *Nótese que fijado un valor de n , hay $n + 1$ puntos base de integración, puesto que se empieza a contar en $i = 0$.*

Si se define *cuadratura* como la suma de los productos del valor de la función en unos puntos por unos pesos

$$Q_n = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i), \quad (7)$$

y se define el error de la integración numérica como

$$E_n = \int_a^b R_n(x) dx = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\mu) L(x) dx,$$

entonces la integral (1) puede expresarse como

$$I = \int_a^b f(x) dx = Q_n + E_n. \quad (8)$$

La ecuación (8) visualiza explícitamente el planteamiento general de la integración numérica. Es decir, desde el punto de vista numérico la integral de una función se expresa como una cuadratura más un error de integración. Obsérvese que la cuadratura representa la aproximación numérica al valor exacto de la integral. Concretamente, en los apartados siguientes se analizarán las propiedades más importantes de diferentes tipos de cuadraturas. Por

el contrario, el error de integración no se puede calcular puesto que se desconoce el valor de $\mu(x)$ y en la mayoría de casos la expresión de la derivada $n + 1$ de la función $f(x)$.

Observación 2. *El objetivo de la integración numérica es calcular de forma eficiente una integral definida. Por consiguiente, no interesa que el error de interpolación, $R_n(x)$, sea pequeño, sino que E_n sea pequeño. Por ejemplo, en la figura 1 se aproxima una función $f(x)$ por un polinomio $P_n(x)$. Desde el punto de vista de la aproximación numérica este resultado podría ser inaceptable debido a las oscilaciones que presenta el polinomio interpolador y a las grandes diferencias que hay entre éste y la función $f(x)$. Sin embargo, en la integración numérica de funciones este comportamiento no es relevante y el objetivo es que la diferencia entre la integral de la función y el polinomio sea lo menor posible. Obsérvese que en el ejemplo presentado en la figura 1 el polinomio interpolador sobrevalora e infravalora la función $f(x)$ en diferentes intervalos del dominio de integración. De forma que existe una compensación de áreas y el valor de la integral de $f(X)$ y $P_n(x)$ de puede ser muy parecida.*

1.3. Clasificación y definiciones

Las cuadraturas de integración usualmente se clasifican a partir de dos criterios. El primero tiene en consideración los extremos del intervalo de integración. Una cuadratura se denomina *cerrada* si los extremos forman parte de los puntos base de integración, es decir, $a = x_0$ y $b = x_n$ (ver figura 2.a). Por el contrario, una cuadratura se denomina *abierta* si los extremos del intervalo no forman parte de los puntos base de integración (ver figura 2.b).

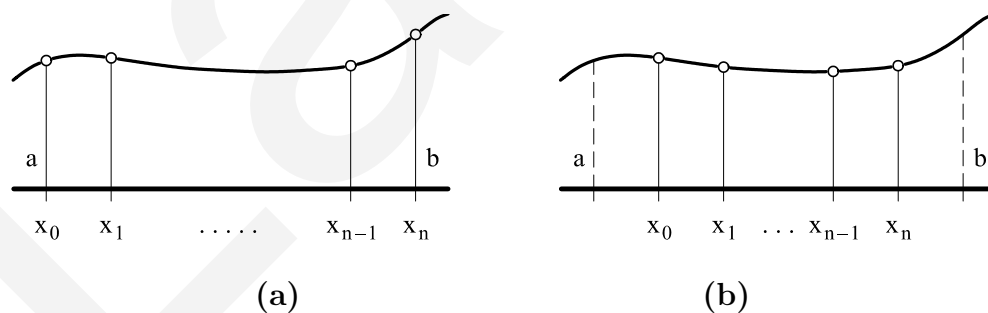


Figura 2: Clasificación de las cuadraturas de integración de acuerdo con los extremos de integración: **(a)** cuadratura cerrada, **(b)** cuadratura abierta.

El segundo criterio se basa en la elección de los puntos base de integración.

- Si los puntos base de integración están predeterminados, entonces las cuadraturas se denominan de *Newton-Cotes*. En estos casos los puntos de integración, $\{x_i, i = 0, \dots, n\}$, están fijos y el método de integración determina cuanto valen los pesos de integración, $\{w_i, i = 0, \dots, n\}$, y una expresión para el error, E_n . Como caso particular y de gran interés práctico, se analizará el caso de puntos equiespaciados.
- Si los puntos base de integración están libres, entonces las cuadraturas se denominan de *Gauss*. En este caso se supone que es posible evaluar la función $f(x)$ en cualquier punto del intervalo de integración. A fin de mejorar la precisión del cálculo, el método de integración determina: 1. cuales son los puntos de integración, $\{x_i, i = 0, \dots, n\}$, 2. cuanto valen los pesos de integración, $\{w_i, i = 0, \dots, n\}$, y 3. cual es la expresión del término del error, E_n .
- Si algunos de los puntos están predeterminados y el resto están libres, entonces las cuadraturas se denominan *mixtas*. En general, cuanto mayor sea el número de puntos libres mayor será la precisión de la cuadratura. Es decir, sólo se fijan los puntos estrictamente necesarios.

Una vez se ha desarrollado un tipo de cuadratura es importante poder asegurar si al ir añadiendo más puntos de integración mejora el resultado de la integración numérica. En este sentido, dada la integral definida (1) y una cuadratura (7) se dice que la cuadratura *converge* al valor exacto de la integral si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = I,$$

o equivalentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 0.$$

Finalmente, es importante definir un criterio para poder comparar el comportamiento de varias cuadraturas. Por consiguiente, se dice que una cuadratura es de *orden* n cuando integra exactamente todo polinomio de grado n y no integra exactamente algún polinomio de grado $n + 1$.

Observación 3. *En la definición de orden de convergencia de una cuadratura se utilizan los polinomios como funciones de referencia. En la práctica, las cuadraturas se utilizan para aproximar la integral de un función, $f(x)$, cualquiera.*

Observación 4. *Si una cuadratura tiene orden de integración superior a otra cuadratura no implica que siempre proporcione mejores aproximaciones al valor exacto de una integral. Nótese que el orden de una cuadratura sólo hace*

referencia al grado del polinomio que siempre integra exactamente. Es decir, por muy alto que sea el grado de los polinomios que se integra exactamente no se tiene porque integrar mejor una función cualquiera. Sin embargo, para determinadas cuadraturas y funciones, es cierto que un mayor orden de de integración implica aproximaciones numéricas más exactas.

2. Integración de Newton-Cotes

2.1. Introducción

En el ámbito de las ciencias aplicadas y de la ingeniería es muy usual tener que calcular la integral de una función de la cual sólo se conocen sus valores en unos puntos equiespaciados en el tiempo o en el espacio. Esta característica de los puntos base de integración permite deducir fórmulas generales de fácil y amplia utilización.

Supóngase que para calcular la integral (1) se dispone de $n + 1$ puntos en los que se conoce el valor de la función $f(x)$, es decir, se conocen los valores $\{(x_i, f(x_i)), i = 0, \dots, n\}$. Como se ha comentado en el apartado anterior, una de las técnicas más utilizadas consiste en aproximar la función $f(x)$ por un polinomio que pase por estos $n + 1$ puntos. Si se utilizan los resultados obtenidos en la interpolación de Lagrange, entonces el resultado de la integración numérica de (1) viene dado por la expresión (6). Nótese que esta ecuación es válida para una distribución cualquiera de $n + 1$ puntos. Sin embargo, en este apartado se particulariza la ecuación (6) para puntos base equiespaciados. Concretamente, primero se deducen las fórmulas cerradas de Newton-Cotes y después se analizan las fórmulas abiertas de Newton-Cotes. Finalmente se estudian diferentes técnicas para mejorar la precisión de las aproximaciones obtenidas mediante las fórmulas anteriormente citadas.

2.2. Fórmulas cerradas de Newton-Cotes

Supóngase que los $n + 1$ puntos están equiespaciados en el dominio de integración $[a, b]$, de forma que el primer y el último nodo coinciden con los límites de integración tal como muestra la figura 3. Entonces,

$$x_i = x_0 + ih = a + ih \quad i = 0, \dots, n$$

donde

$$h = \frac{b - a}{n}.$$

Nótese que, con esta notación, un punto x cualquiera del dominio de integración verifica

$$x = x_0 + \alpha h = a + \alpha h \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

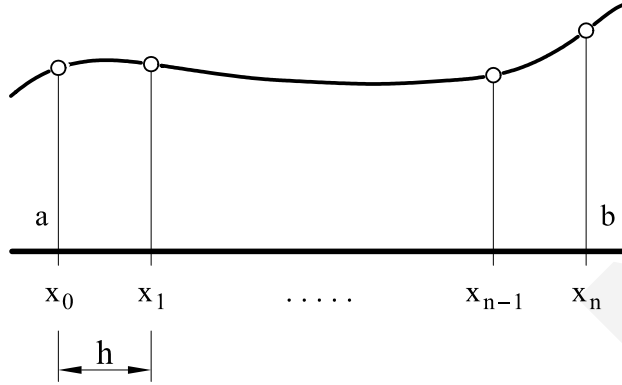


Figura 3: Discretización general del dominio de integración mediante fórmulas cerradas de Newton-Cotes.

Por lo tanto, la expresión de los polinomios de Lagrange (4) y del polinomio de Lagrange (5) es

$$L_i(x) = L_i(x_0 + \alpha h) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{\alpha - j}{i - j} \quad (9)$$

$$L(x) = L(x_0 + \alpha h) = h^{n+1} \prod_{j=0}^n (\alpha - j). \quad (10)$$

En estas condiciones, la expresión (6) puede escribirse en función de α como

$$\begin{aligned} I = \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=0}^n f(x_i) h \int_0^n L_i(\alpha) d\alpha + \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^n f^{(n+1)}(\mu) L(\alpha) d\alpha \\ &= \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) + E_n, \end{aligned} \quad (11)$$

donde los pesos de integración valen

$$w_i = h \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{\alpha - j}{i - j} d\alpha \quad i = 0, \dots, n \quad (12)$$

y el error de integración es

$$E_n = \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^n f^{(n+1)}(\mu) \prod_{j=0}^n (\alpha - j) d\alpha. \quad (13)$$

Nótese que en la ecuación (13) μ , depende de α y por tanto no es posible sacar fuera de la integral el término $f^{n+1}(\mu)$. Sin embargo, la expresión del error (13) puede simplificarse considerablemente. En particular, se verifica el siguiente teorema (ver [5] página 313 para una demostración detallada de este teorema)

Teorema 1. *Sea*

$$Q_n = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i),$$

una cuadratura cerrada de $n + 1$ puntos equiespaciados según $h = (b - a)/n$ que aproxima a la integral

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Entonces el error de integración verifica

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\mu) \int_0^n \prod_{j=0}^n (\alpha - j) d\alpha \\ &= \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\mu) \int_0^n \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n) d\alpha, \end{aligned} \quad (14)$$

si n es impar y $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$ y

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{h^{n+3}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\mu) \int_0^n \alpha \prod_{j=0}^n (\alpha - j) d\alpha \\ &= \frac{h^{n+3}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\mu) \int_0^n \alpha^2(\alpha - 1) \dots (\alpha - n) d\alpha, \end{aligned} \quad (15)$$

si n es par y $f(x) \in C^{n+2}[a, b]$.

Observación 5. *Nótese que si n es impar, y de acuerdo con la expresión general del error de integración (13), el orden de integración es n (se integran exactamente todos los polinomios de grado n puesto que el error de integración depende de la derivada $n + 2$ de la función integrando). Sin embargo, si n es par el orden de integración aumenta y es $n + 1$ (se integran exactamente todos los polinomios de grado $n + 1$). En este sentido, es preferible utilizar cuadraturas con valores de n par puesto que se obtiene un orden de integración extra.*

Seguidamente, se determinan los pesos y el error de integración para dos fórmulas cerradas simples de Newton-Cotes. Concretamente, se obtiene la fórmula simple del trapecio y la fórmula simple de Simpson.

Fórmula simple del trapecio

En este caso la función $f(x)$ se aproxima mediante un polinomio de grado uno ($n = 1$). Por consiguiente, la ecuación (11) es

$$I = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + E_1.$$

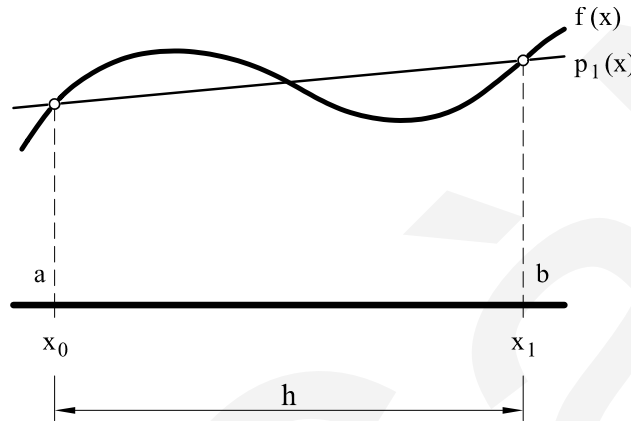


Figura 4: Interpretación gráfica de la fórmula simple del trapecio.

De acuerdo con la expresiones (9) y (12) los pesos de integración valen

$$w_0 = h \int_0^1 \frac{\alpha - 1}{-1} d\alpha = h \left(\alpha \Big|_0^1 - \frac{\alpha^2}{2} \Big|_0^1 \right) = \frac{h}{2}$$

$$w_1 = h \int_0^1 \frac{\alpha}{1} d\alpha = h \frac{\alpha^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{h}{2}.$$

Para obtener la expresión del error de integración basta con hacer $n = 1$ en la ecuación (14)

$$E_1 = \frac{h^3}{2!} f^{(2)}(\mu) \int_0^1 \alpha(\alpha - 1) d\alpha = \frac{h^3}{2} f^{(2)}(\mu) \left(\frac{\alpha^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{\alpha^2}{2} \Big|_0^1 \right) = -\frac{h^3}{12} f^{(2)}(\mu)$$

Por lo tanto la fórmula simple del trapecio es

$$I = \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} (f_0 + f_1) - \frac{h^3}{12} f^{(2)}(\mu) \quad (16)$$

En la figura 4 se presenta la interpretación gráfica de esta fórmula simple. Entonces la integral $\int_a^b f(x) dx$ se aproxima por el área de un trapecio de base h y alturas f_0 y f_1 (ver figura 4).

Como en el término del error de integración aparece la derivada segunda de $f(x)$, la fórmula simple del trapecio integra exactamente cualquier polinomio de grado 1 o menor. Por tanto, es una fórmula de orden 1.

Fórmula simple de Simpson

En este caso la función $f(x)$ se aproxima por una parábola ($n = 2$) y la ecuación (11) es

$$I = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + E_2.$$

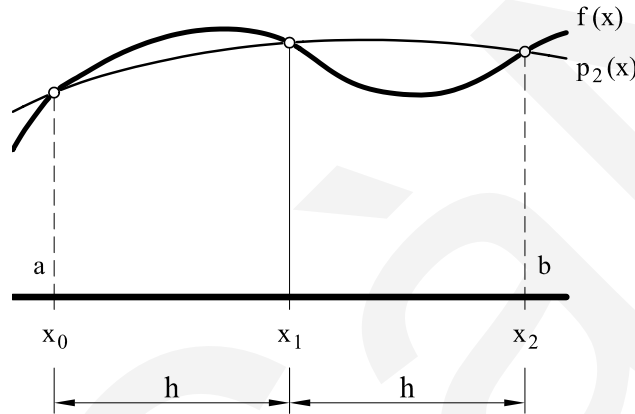


Figura 5: Interpretación gráfica de la fórmula simple de Simpson.

De acuerdo con las expresiones (9) y (12) los pesos de integración valen

$$w_0 = h \int_0^2 \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{(-1)(-2)} d\alpha = \frac{h}{2} \left(\frac{\alpha^3}{3} \Big|_0^2 - 3 \frac{\alpha^2}{2} \Big|_0^2 + \alpha \Big|_0^2 \right) = \frac{h}{3}$$

$$w_1 = h \int_0^2 \frac{\alpha(\alpha - 2)}{(1)(-1)} d\alpha = h \left(2 \frac{\alpha^2}{2} \Big|_0^2 - \frac{\alpha^3}{3} \Big|_0^2 \right) = \frac{4h}{3}$$

$$w_2 = h \int_0^2 \frac{\alpha(\alpha - 1)}{(2)(1)} d\alpha = h \left(\frac{\alpha^3}{3} \Big|_0^2 - \frac{\alpha^2}{2} \Big|_0^2 \right) = \frac{h}{3}.$$

Puesto que en este caso n es par, para obtener la expresión del error de integración se debe aplicar la ecuación (15) con $n = 2$

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{h^5}{4!} f^{(4)}(\mu) \int_0^2 \alpha^2(\alpha - 1)(\alpha - 2) d\alpha \\ &= \frac{h^5}{24} f^{(4)}(\mu) \left(\frac{\alpha^5}{5} \Big|_0^2 - 3 \frac{\alpha^4}{4} \Big|_0^2 + 2 \frac{\alpha^3}{3} \Big|_0^2 \right) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu) \end{aligned}$$

Por lo tanto la fórmula simple de Simpson es

$$I = \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu) \quad (17)$$

La figura 5 presenta la interpretación gráfica de la fórmula simple de Simpson. La función $f(x)$ se interpola mediante una parábola. Como el término del error de integración aparece la derivada cuarta de $f(x)$, la fórmula simple de Simpson integra exactamente cualquier polinomio de grado 3 o menor. Por tanto, es una fórmula de orden 3. Obsévese que al ser n par se ha incrementado el orden de integración respecto lo que parece indicar la expresión general (13).

En el apéndice A se presentan los puntos base y los pesos de integración para diversas fórmulas simples de Newton-Cotes. Su deducción es parecida a la realizada en los dos ejemplos anteriores. Como puede observarse, en todos los casos se verifica que cuando n es impar el orden de integración es n y cuando n es par el orden de integración es $n + 1$.

2.3. Fórmulas abiertas de Newton-Cotes

Supóngase que los $n + 1$ puntos están equiespaciados según una distancia h en el dominio de integración $[a, b]$, de forma que el primer y el último nodo también distan h de los límites de integración (los límites del dominio de integración, a y b , no son puntos base de integración). Es decir, se divide el dominio de integración en $n + 2$ intervalos de longitud h (ver figura 6). Entonces,

$$x_i = x_0 + ih \quad i = 0, \dots, n$$

donde

$$h = \frac{b - a}{n + 2}.$$

Nótese que $a = x_0 - h$ y que $b = x_n + h$.

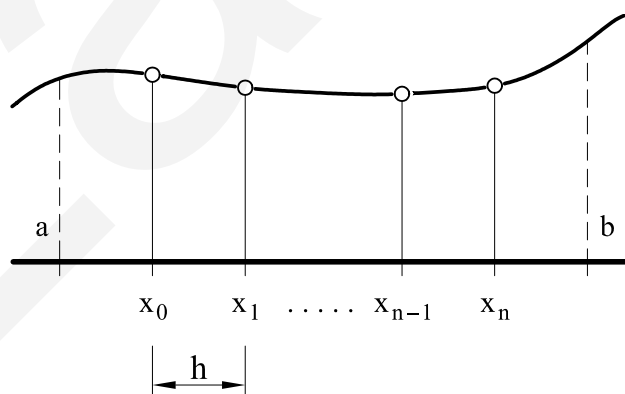


Figura 6: Discretización general del dominio de integración mediante fórmulas abiertas de Newton-Cotes.

Como en las cuadraturas cerradas, substituyendo las expresiones (9) y (10) en la ecuación (6), ésta última puede escribirse en función de α como

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=0}^n f(x_i)h \int_{-1}^{n+1} L_i(\alpha) d\alpha + \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} \int_{-1}^{n+1} f^{(n+1)}(\mu)L(\alpha) d\alpha \\ &= \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) + E_n \end{aligned} \quad (18)$$

donde los pesos y el error de integración valen, respectivamente,

$$w_i = h \int_{-1}^{n+1} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{\alpha - j}{i - j} d\alpha \quad i = 0, \dots, n \quad (19)$$

$$E_n = \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} \int_{-1}^{n+1} f^{(n+1)}(\mu) \prod_{j=0}^n (\alpha - j) d\alpha \quad (20)$$

La expresión del error (13) puede simplificarse considerablemente. En particular, se verifica el siguiente teorema (ver [5] página 314 para una demostración detallada de este teorema)

Teorema 2. *Sea*

$$Q_n = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i),$$

una cuadratura abierta de $n+1$ puntos equiespaciados según $h = (b-a)/(n+2)$ que aproxima a la integral

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Entonces el error de integración verifica

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\mu) \int_{-1}^{n+1} \prod_{j=0}^n (\alpha - j) d\alpha \\ &= \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\mu) \int_{-1}^{n+1} \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n) d\alpha, \end{aligned} \quad (21)$$

si n es impar y $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$ y

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{h^{n+3}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\mu) \int_{-1}^{n+1} \alpha \prod_{j=0}^n (\alpha - j) d\alpha \\ &= \frac{h^{n+3}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\mu) \int_{-1}^{n+1} \alpha^2(\alpha-1)\dots(\alpha-n) d\alpha, \end{aligned} \quad (22)$$

si n es par y $f(x) \in C^{n+2}[a, b]$.

Observación 6. Al igual que sucedía con las fórmulas cerradas de Newton-Cotes, es importante resaltar que cuando n es impar, y de acuerdo con la expresión general del error de integración (20), el orden de integración es n (se integran exactamente todos los polinomios de grado n). Sin embargo, si n es par el orden de integración aumenta y es $n + 1$ (se integran exactamente todos los polinomios de grado $n + 1$).

A continuación se determinan los pesos y el error de integración para las fórmulas abiertas de Newton-Cotes con $n = 0$ y $n = 1$.

Fórmula simple para $n = 0$

En este caso la función $f(x)$ se aproxima por un polinomio de grado 0 ($n = 1$). Por consiguiente, la ecuación (11) es

$$I = w_0 f(x_0) + E_0.$$

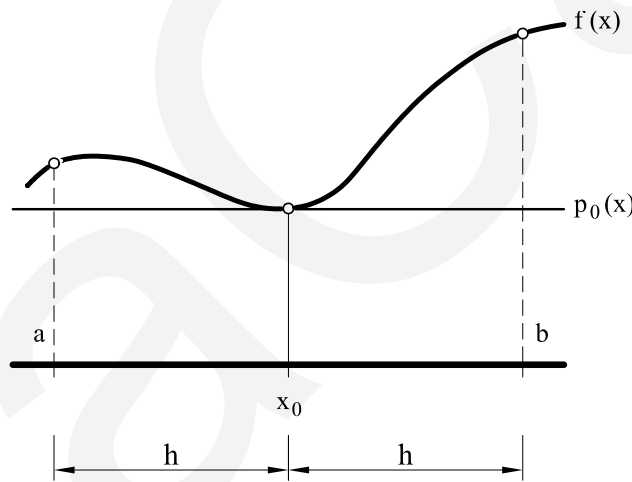


Figura 7: Interpretación gráfica de la fórmula abierta con $n = 0$.

El peso y el error de integración se calculan a partir de las expresiones (19) y (22) respectivamente y valen

$$w_0 = h \int_{-1}^1 d\alpha = h\alpha \Big|_{-1}^1 = 2h$$

$$E_0 = \frac{h^3 f^{(2)}(\mu)}{2!} \int_{-1}^1 \alpha^2 d\alpha = \frac{h^3 f^{(2)}(\mu)}{2} \frac{\alpha^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{h^3}{3} f^{(2)}(\mu).$$

Por lo tanto la fórmula abierta para $n = 0$ es

$$I = \int_a^b f(x) dx = 2hf_0 + \frac{h^3}{3} f''(\mu). \quad (23)$$

La figura 7 presenta la interpretación gráfica de esta fórmula simple. La integral $\int_a^b f(x) dx$ se aproxima por el área del rectángulo de base igual a la longitud del dominio de integración, $2h$, y de altura igual al valor de la función en el punto medio del dominio.

Nótese que el error de integración de la fórmula abierta (23) está determinado por la ecuación (22) y no por la expresión general (20) por ser $n = 0$ par. Además el orden de integración es 1 puesto que en el término del error de integración aparece la derivada segunda de $f(x)$.

Fórmula simple para $n = 1$

La función $f(x)$ se aproxima por una recta ($n = 1$) y la ecuación (11) se reduce a

$$I = w_0f(x_0) + w_1f(x_1) + E_1.$$

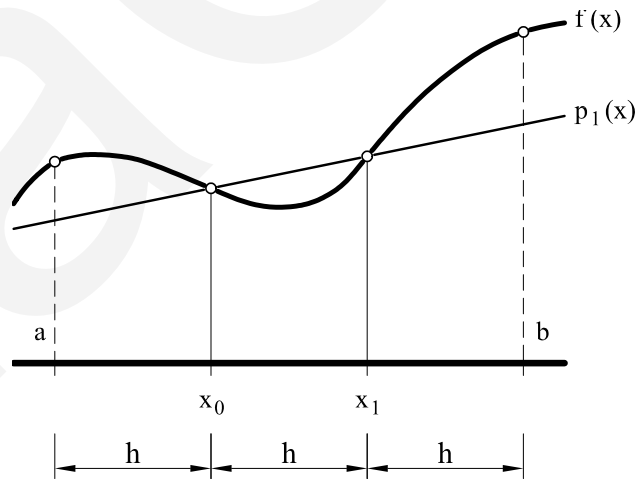


Figura 8: Interpretación gráfica de la fórmula abierta con $n = 1$.

Los pesos y el error de integración se calculan a partir de las expresiones

(19) y (21) y son

$$w_0 = h \int_{-1}^1 \frac{\alpha - 1}{(-1)} d\alpha = h \left(\frac{\alpha^2}{2} \Big|_{-1}^2 - \alpha \Big|_{-1}^2 \right) = \frac{3}{2}h$$

$$w_1 = h \int_{-1}^1 \frac{\alpha}{1} d\alpha = h \frac{\alpha^2}{2} \Big|_{-1}^2 = \frac{3}{2}h$$

$$E_1 = \frac{h^3 f^{(2)}(\mu)}{2!} \int_{-1}^2 \alpha(\alpha - 1) d\alpha = \frac{h^3 f^{(2)}(\mu)}{2} \left(\frac{\alpha^3}{3} \Big|_{-1}^2 - \frac{\alpha^2}{2} \Big|_{-1}^2 \right) = \frac{3h^3}{4} f^{(2)}(\mu).$$

Por lo tanto la fórmula abierta para $n = 1$ es

$$I = \int_a^b f(x) dx = \frac{3h}{2} (f_0 + f_1) + \frac{3h^3}{4} f^{(2)}(\mu).$$

Al igual que la fórmula abierta con $n = 0$, la expresión anterior también es una fórmula de orden 1. En la figura 8 se presenta la interpretación gráfica de esta fórmula simple.

2.4. Técnicas de mejoras de la integración numérica

En este apartado se presentan cuatro técnicas bastante utilizadas para mejorar el comportamiento de las cuadraturas de Newton-Cotes anteriormente presentadas. Por ejemplo, para las fórmulas compuestas se obtiene que las cuadraturas desarrolladas son convergentes.

2.4.1. Combinación de fórmulas simples

La idea básica de esta técnica es combinar dos fórmulas simples del mismo orden a fin de mejorar el resultado final de la aproximación numérica a la integral. Con este fin se consideran dos fórmulas del mismo orden mediante las cuales se aproxima el valor de la integral (1), es decir,

$$I = I_1 + E_1 = I_2 + E_2, \quad (24)$$

donde I_1 y I_2 representan las dos cuadraturas y E_1 y E_2 sus respectivos errores de integración. Puesto que las dos fórmulas simples son del mismo orden entonces estos errores pueden escribirse como

$$\begin{aligned} E_1 &= \widehat{k}_1 h^p f^{(p)}(\mu_1) = k_1 (b - a)^p f^{(p)}(\mu_1) \\ E_2 &= \widehat{k}_2 h^p f^{(p)}(\mu_2) = k_2 (b - a)^p f^{(p)}(\mu_2), \end{aligned}$$

donde $\widehat{k}_1, \widehat{k}_2, k_1$ y k_2 , son unas constantes, h es la distancia entre los puntos base, y p y q son unos valores característicos de las fórmulas de integración (recuérdese que si en el error de integración aparece la derivada q -ésima, entonces el orden de integración es $q - 1$).

Suponiendo que la derivada q -ésima de la función es suficientemente suave, es decir, si $f^{(q)}(\mu_1) \approx f^{(q)}(\mu_2)$, entonces

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{k_1}{k_2} \quad \Rightarrow \quad E_1 = \frac{k_1}{k_2} E_2.$$

Substituyendo este resultado en la ecuación (24) se obtiene

$$I = I_1 + \frac{k_1}{k_2} E_2 = I_2 + E_2 \quad \Rightarrow \quad E_2 = \frac{I_1 - I_2}{1 - k_1/k_2}.$$

Por lo tanto, la aproximación a la integral (1) puede mejorarse a partir de los cálculos previamente realizados mediante las cuadraturas I_1 y I_2 como

$$I = I_2 + k_2 \frac{I_1 - I_2}{k_2 - k_1},$$

o equivalentemente,

$$I = \frac{k_2 I_1 - k_1 I_2}{k_2 - k_1} \quad (25)$$

Por ejemplo, supóngase que se ha aproximado una integral definida mediante la cuadratura cerrada de Simpson, $n = 2$, y la segunda cuadratura cerrada de Simpson, $n = 3$, (ver la tabla de cuadraturas cerradas de Newton-Cotes que aparece en el apéndice A). Nótese que estas dos cuadraturas son del mismo orden y que en este caso:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{h_1}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) & E_1 &= \frac{-1}{90} h_1^5 f^{(4)}(\mu_1) \\ I_2 &= \frac{3h_2}{8} (f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)) & E_2 &= \frac{-3}{80} h_2^5 f^{(4)}(\mu_2), \end{aligned}$$

es decir,

$$k_1 = \frac{-1}{90 \cdot 2^5} \quad k_2 = \frac{-3}{80 \cdot 3^5}.$$

Por lo tanto, a partir de los resultados obtenidos con las dos cuadraturas de Simpson, se puede mejorar la aproximación numérica de la integral utilizando la expresión (25), que en este caso particular es

$$I = \frac{9}{5} I_2 - \frac{4}{5} I_1.$$

2.4.2. Fórmulas compuestas

La utilización de fórmulas compuestas es uno de los métodos de integración más utilizados en ciencias e ingeniería cuando los datos a integrar están definidos sobre puntos equiespaciados. El método consiste en dividir el dominio de integración en m intervalos y aplicar en cada uno de ellos una fórmula cerrada de Newton-Cotes de n subintervalos o $n + 1$ puntos (ver figura 9). Por lo tanto, el número total de intervalos utilizados es

$$s = mn$$

y el número total de puntos de integración es

$$p = m(n + 1) - (m - 1) = nm + 1.$$

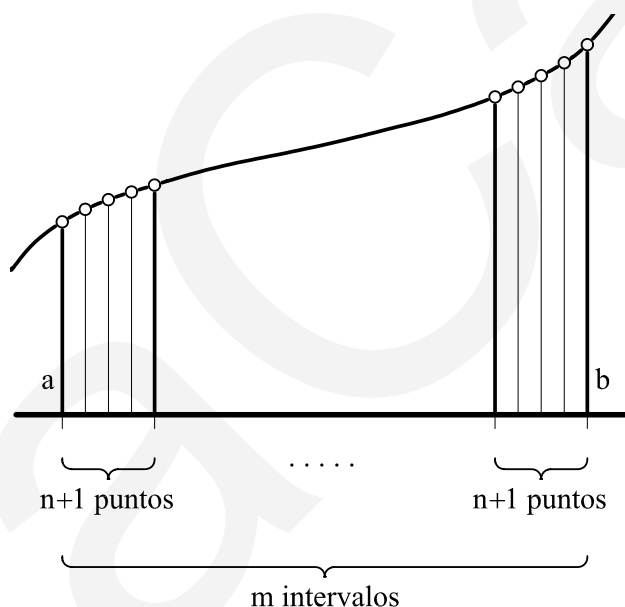


Figura 9: Discretización general del dominio de integración mediante fórmulas compuestas.

Observación 7. Es posible deducir fórmulas compuestas a partir de fórmulas abiertas de Newton-Cotes. En este caso, el dominio de integración se dividiría en m intervalos y en cada uno de ellos se utilizaría la fórmula abierta. Sin embargo, ahora sería imposible mantener los puntos base de integración equiespaciados.

En general, es posible deducir fórmulas compuestas para cualquier fórmula simple de Newton-Cotes de $n+1$ puntos. No obstante, en la práctica, las dos fórmulas más utilizadas son la *fórmula compuesta del trapecio* y la *fórmula compuesta de Simpson*.

Fórmula compuesta del trapecio

En este caso se subdivide el dominio de integración en m intervalos y en cada uno de ellos se utiliza la fórmula simple del trapecio (16), es decir, $n = 1$ subintervalo, o 2 puntos de integración. Por lo tanto, el número total de intervalos es $s = m$ y el número total de puntos es $p = m + 1$. La figura 10 presenta gráficamente tanto la partición del dominio de integración en $\delta_1, \dots, \delta_m$ intervalos como la numeración de los puntos base de integración.

En estas condiciones

$$\begin{aligned} I = \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{h_i}{2} (f(x_{i-1}) + f(x_i)) - \frac{h_i^3}{12} f^{(2)}(\mu_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{h_i}{2} (f(x_{i-1}) + f(x_i)) - \sum_{i=1}^m \frac{h_i^3}{12} f^{(2)}(\mu_i). \end{aligned}$$

Si los puntos están equiespaciados, entonces

$$h_i = h = \frac{b-a}{m},$$

y por lo tanto la integral puede expresarse como

$$I = \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2m} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(x_m) \right) - \frac{(b-a)^3}{12m^3} \sum_{i=1}^{m-1} f^{(2)}(\mu_i).$$

Puesto que existe un $\mu \in [a, b]$ tal que (ver [5] página 305)

$$\sum_{i=1}^m f^{(2)}(\mu_i) = m f^{(2)}(\mu),$$

entonces

$$I = \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2m} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(x_m) \right) - \frac{(b-a)^3}{12m^2} f^{(2)}(\mu), \quad (26)$$

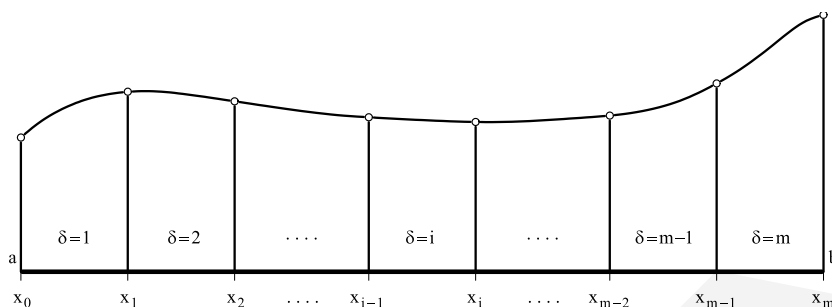


Figura 10: Discretización general del dominio de integración mediante la fórmula compuesta del trapecio.

que recibe el nombre de *fórmula o regla compuesta del trapecio*. Nótese que en la expresión (26) el número total de intervalos coincide con el número de veces que se aplica la fórmula simple del trapecio, es decir, $s = m$. Por lo tanto, el error de integración de la fórmula compuesta del trapecio es

$$E_s = -\frac{(b-a)^3}{12s^2} f''(\mu). \quad (27)$$

Observación 8. Al contrario de lo que sucede con las fórmulas simples de Newton-Cotes, al aumentar el número de puntos base de integración en la expresión anterior el orden de la derivada que aparece en el error de integración permanece constante. Por lo tanto, si dicha derivada está acotada en el dominio de integración, $f''(x) < k, \forall x \in [a, b]$, entonces

$$\lim_{s \rightarrow \infty} E_s = 0,$$

y la regla compuesta del trapecio converge al valor exacto de la integral.

Fórmula compuesta de Simpson

La regla compuesta de Simpson se obtiene al dividir el dominio de integración en m intervalos y en cada uno de ellos utilizar la fórmula simple de Simpson (17) que corresponde a $n = 2$ subintervalos, o 3 puntos de integración. Por lo tanto, el número total de intervalos es $s = 2m$ y el número total de puntos es $p = 2m + 1$. La figura 11 presenta gráficamente tanto la partición del dominio de integración en $\delta_1, \dots, \delta_m$ intervalos, los cuales a su vez se subdividen en dos subintervalos cada uno. Así mismo, esta figura también muestra la numeración de los puntos base de integración.

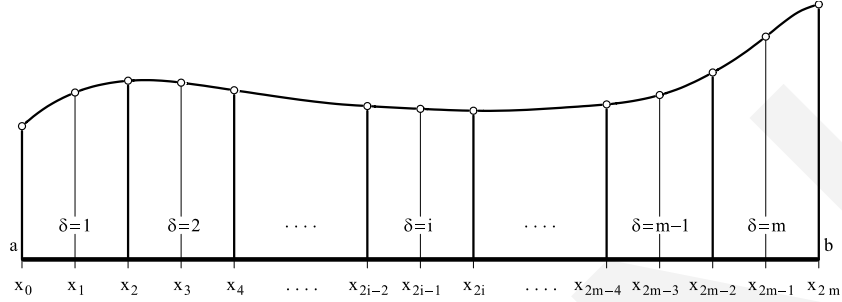


Figura 11: Discretización general del dominio de integración mediante la fórmula compuesta de Simpson.

En estas condiciones

$$\begin{aligned} I = \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=1}^m \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{h_i}{3} \left(f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i}) \right) - \frac{h_i^5}{90} f^{(4)}(\mu_i) \right) \end{aligned}$$

Si los puntos están equiespaciados, entonces

$$h_i = h = \frac{b-a}{2m},$$

y por lo tanto la integral puede expresarse como

$$\begin{aligned} I = \int_a^b f(x) dx &= \frac{b-a}{6m} \sum_{i=1}^m \left(f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i}) \right) \\ &\quad - \frac{(b-a)^5}{90(2m)^5} \sum_{i=1}^m f^{(4)}(\mu_i) \end{aligned}$$

Puesto que existe un $\mu \in [a, b]$ tal que (ver [5] página 305)

$$\sum_{i=1}^m f^{(4)}(\mu_i) = m f^{(4)}(\mu),$$

entonces

$$\begin{aligned} I = \int_a^b f(x) dx &= \frac{b-a}{6m} \left(f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^m f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(x_{2m}) \right) \\ &\quad - \frac{(b-a)^5}{2880m^4} f^{(4)}(\mu) \end{aligned} \tag{28}$$

que recibe el nombre de *fórmula o regla compuesta de Simpson*. Nótese que el término del error en la expresión anterior está en función de el número de veces que se aplica la fórmula de Simpson, m . Si dicho término se expresa en función del número total de intervalos, $s = 2m$, entonces:

$$E_s = \frac{(b-a)^5}{180s^4} f^{(4)}(\mu) \quad (29)$$

Observación 9. *El número de puntos base de integración utilizados en la regla compuesta de Simpson, $p = 2m + 1$, siempre es impar.*

Observación 10. *Al igual que la regla compuesta del trapecio, (26), al aumentar el número de puntos base de integración en la expresión (29) el orden de la derivada que aparece en el error de integración permanece constante. Por lo tanto, si dicha derivada está acotada en el intervalo de integración, $f^{(4)}(x) < k, \forall x \in [a, b]$, entonces*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} E_s = 0,$$

y la regla compuesta de Simpson converge al valor exacto de la integral.

2.4.3. Extrapolación de Richardson

La extrapolación de Richardson consiste en mejorar la aproximación numérica obtenida mediante la combinación de los resultados obtenidos al aplicar una fórmula compuesta con dos números diferentes de puntos base de integración. En particular, seguidamente se aplica la extrapolación de Richardson a la fórmula compuesta del trapecio y de Simpson.

Aplicación a la fórmula compuesta del trapecio

Supóngase que se ha calculado el valor de la integral (1) mediante la regla compuesta del trapecio utilizando s_1 y s_2 intervalos ($s_1 + 1$ y $s_2 + 1$ puntos). Por lo tanto se verifica

$$I = I_1 + E_1 = I_2 + E_2, \quad (30)$$

donde I_1 y I_2 representan los valores numéricos obtenidos al aplicar la cuadratura compuesta del trapecio con s_1 y s_2 intervalos respectivamente y E_1 y E_2 son los errores de integración. De acuerdo con la ecuación (27) los errores de integración son

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{(b-a)^3}{12s_1^2} f^{(2)}(\mu_1) \\ E_2 &= \frac{(b-a)^3}{12s_2^2} f^{(2)}(\mu_2) \end{aligned}$$

donde μ_1 y μ_2 son dos puntos pertenecientes al dominio de integración $[a, b]$. Si la derivada segunda de la función $f(x)$ es suficientemente suave, es decir, si $f''(\mu_1) \approx f''(\mu_2)$, entonces

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2 \Rightarrow E_1 = \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2 E_2.$$

Substituyendo este resultado en la ecuación (30) se obtiene

$$I = I_1 + \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2 E_2 = I_2 + E_2 \Rightarrow E_2 = \frac{I_2 - I_1}{\left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2 - 1}.$$

Por lo tanto, la aproximación a la integral (1) puede mejorarse a partir de los cálculos anteriormente realizados mediante las cuadraturas compuestas I_1 y I_2 como

$$I = I_2 + E_2 = I_2 + \frac{I_2 - I_1}{\left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2 - 1} = \frac{I_2 \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2 - I_1}{\left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2 - 1}.$$

Aunque la elección del número de intervalos es arbitraria, en la práctica es usual tomar $s_2 = 2s_1$ (de esta forma, y como se verá en la integración de Romberg, es posible aprovechar las evaluaciones de la función $f(x)$ realizadas previamente). Entonces, la ecuación anterior se reduce a

$$I = \frac{4I_2 - I_1}{3} \quad (31)$$

Aplicación a la fórmula compuesta de Simpson

La aplicación de la extrapolación de Richardson a la fórmula compuesta de Simpson es muy similar al desarrollo anterior. De nuevo, supóngase que se ha calculado el valor de la integral (1) mediante la regla compuesta de Simpson utilizando s_1 y s_2 intervalos. Es decir,

$$I = I_1 + E_1 = I_2 + E_2, \quad (32)$$

donde I_1 y I_2 representan los valores numéricos obtenidos al aplicar la cuadratura compuesta de Simpson con s_1 y s_2 intervalos respectivamente y E_1 y E_2 son los errores de integración que se desconocen. De acuerdo con (29) estos errores pueden expresarse como

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{(b-a)^5}{180s_1^2} f^{(4)}(\mu_1) \\ E_2 &= \frac{(b-a)^5}{180s_2^2} f^{(4)}(\mu_2) \end{aligned}$$

donde μ_1 y μ_2 son dos puntos pertenecientes al dominio de integración $[a, b]$. Suponiendo que derivada cuarta de la función $f(x)$ es suficientemente suave (es decir, $f^{(4)}(\mu_1) \approx f^{(4)}(\mu_2)$) es posible expresar E_2 en función de E_1 de forma similar a como se ha realizado en la aplicación a la fórmula compuesta del trapecio. Por tanto, la mejora de la aproximación a la integral (1) a partir de los cálculos realizados previamente mediante la fórmula compuesta de Simpson es

$$I = I_2 + E_2 = I_2 + \frac{I_2 - I_1}{\left(\frac{s_2}{s_1}\right)^4 - 1} = \frac{I_2 \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^4 - I_1}{\left(\frac{s_2}{s_1}\right)^4 - 1}.$$

Si, como en la aplicación a la regla compuesta del trapecio, se toma $s_2 = 2s_1$, entonces

$$I = \frac{16I_2 - I_1}{15} \quad (33)$$

2.4.4. Integración de Romberg

La integración de Romberg no es más que una aplicación recursiva de la extrapolación de Richardson aplicada a la fórmula compuesta del trapecio.

Con el fin de sistematizar este método de integración el proceso se divide en varios pasos. En el primer paso se designa por $T_{i,1}$ el valor numérico que se obtiene al aproximar la integral (1) mediante la regla compuesta del trapecio (26) utilizando $m = 2^i$ intervalos, con $i = 1, \dots, N$ siendo N un valor previamente fijado. Estos resultados se presentan en una columna de la forma siguiente:

$$\begin{array}{ll} T_{0,1} & \Rightarrow \text{valor obtenido al utilizar } m = 2^0 \text{ intervalos} \\ T_{1,1} & \Rightarrow \text{valor obtenido al utilizar } m = 2^1 \text{ intervalos} \\ \vdots & \vdots \\ T_{N-1,1} & \Rightarrow \text{valor obtenido al utilizar } m = 2^{N-1} \text{ intervalos} \\ T_{N,1} & \Rightarrow \text{valor obtenido al utilizar } m = 2^N \text{ intervalos.} \end{array}$$

En realidad, el coste computacional de realizar estas integrales puede reducirse considerablemente puesto que es posible reutilizar los cálculos previamente realizados. Concretamente, primero se calcula la cuadratura compuesta del trapecio con $m = 2^0 = 1$ intervalos, es decir la cuadratura simple del trapecio

$$T_{0,1} = \frac{b-a}{1} \left(\frac{1}{2} (f(a) + f(b)) \right).$$

Seguidamente, se debe calcular la cuadratura compuesta del trapecio con $m = 2^1 = 2$. Sin embargo, esta cuadratura puede expresarse como

$$\begin{aligned} T_{1,1} &= \frac{b-a}{2} \left(\frac{1}{2} (f(a) + f(b)) + f\left(a + \frac{b-a}{2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(T_{0,1} + (b-a) f\left(a + \frac{b-a}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

Del mismo modo, al calcular la cuadratura compuesta del trapecio con $m = 2^2$ y con $m = 2^3$ intervalos se obtiene, respectivamente,

$$\begin{aligned} T_{2,1} &= \frac{b-a}{4} \left(\frac{1}{2} (f(a) + f(b)) + \sum_{i=1}^3 f\left(a + \frac{b-a}{4}i\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(T_{1,1} + \frac{(b-a)}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ \Delta i=2}}^3 f\left(a + \frac{b-a}{4}i\right) \right) \\ T_{3,1} &= \frac{b-a}{8} \left(\frac{1}{2} (f(a) + f(b)) + \sum_{i=1}^7 f\left(a + \frac{b-a}{8}i\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(T_{2,1} + \frac{(b-a)}{4} \sum_{\substack{i=1 \\ \Delta i=2}}^7 f\left(a + \frac{b-a}{8}i\right) \right). \end{aligned}$$

Es fácil demostrar por inducción que la fórmula general para calcular $T_{i,1}$ en función de $T_{i-1,1}$ es

$$T_{i,1} = \frac{1}{2} \left(T_{i-1,1} + \frac{(b-a)}{2^{i-1}} \sum_{\substack{i=1 \\ \Delta i=2}}^{2^i-1} f\left(a + \frac{b-a}{2^i}i\right) \right). \quad (34)$$

Es importante resaltar que, de acuerdo con la recurrencia anterior, para calcular la aproximación $T_{i,1}$ es preciso evaluar la función $f(x)$ sólo $2^i - 1$ veces.

Puesto que $T_{i,1}$ es el resultado de aproximar la integral mediante la cuadratura compuesta del trapecio con $m = 2^i$ intervalos, el error de integración es, ver ecuación (27),

$$E_{i,1} = -\frac{(b-a)^3}{12 \cdot 2^{2i}} f^{(2)}(\mu) \quad \mu \in [a, b].$$

El segundo paso consiste en, una vez calculadas las aproximaciones mediante la cuadratura compuesta del trapecio, realizar una extrapolación de Richardson sobre cada pareja de valores $T_{i,1}$ y $T_{i+1,1}$, con $i = 1, \dots, N - 1$. Puesto

que por construcción el número de intervalos verifica que $s_{i+1} = 2s_i$, entonces puede utilizarse la expresión (31) de forma que

$$T_{i,2} = \frac{4T_{i+1,1} - T_{i,1}}{3} \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (35)$$

donde $T_{i,2}$ es el valor obtenido al aplicar la extrapolación de Richardson sobre $T_{i,1}$ y $T_{i+1,1}$.

Es fácil comprobar que $T_{i,2}$ coincide con la cuadratura compuesta de Simpson cuando $m = i$ (recuérdese que según el subapartado 2.4.2 m es el número de veces que se utiliza una fórmula simple para obtener una fórmula compuesta). En particular,

$$T_{0,2} = \frac{4T_{1,1} - T_{0,1}}{3} = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(a + \frac{(b-a)}{2}\right) + f(b) \right),$$

que coincide con la fórmula simple del trapecio.

Como $T_{i,2}$ es el resultado de aproximar la integral mediante la cuadratura compuesta de Simpson con $m = 2^i$ intervalos, y de acuerdo con la expresión (29), el error de integración es

$$E_{i,2} = -\frac{(b-a)^5}{2880 \cdot 2^{4i}} f^{(4)}(\mu) \quad \mu \in [a, b].$$

El tercer paso consiste en realizar una extrapolación de Richardson sobre cada pareja contigua de los valores anteriormente calculados. Es decir, si $T_{i,3}$, con $i = 1, \dots, N-2$ es la extrapolación de Richardson de los valores $T_{i,2}$ y $T_{i+1,2}$, entonces según la ecuación (33) se obtiene

$$T_{i,3} = \frac{16T_{i+1,2} - T_{i,2}}{15} \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (36)$$

En este caso también se puede demostrar por inducción que $T_{i,3}$ coincide con la fórmula compuesta correspondiente a la fórmula cerrada de cinco puntos, cuando ésta última se aplica $m = 2^i$ veces. Por consiguiente, el error de integración es

$$E_{i,3} = -\frac{(b-a)^7}{1935360 \cdot 2^{6i}} f^{(6)}(\mu) \quad \mu \in [a, b].$$

Las expresiones (35) y (36) son un caso particular de la fórmula general

$$T_{i,j} = \frac{4^{j-1}T_{i+1,j-1} - T_{i,j-1}}{4^{j-1} - 1} \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (37)$$

Además, se demuestra que el error correspondiente a $T_{i,j}$ verifica (ver [1])

$$E_{i,j} = \frac{k(a,b,j)}{2^{2ij}} f^{(2j)}(\mu) \quad \mu \in [a,b],$$

donde $k(a,b,j)$ es una constante que depende de los límites de integración y de j . Es importante resaltar que mientras los valores de $T_{i,j}$, con $j \leq 3$, se corresponden con reglas compuestas de integración, esto no es cierto para $T_{i,j}$, con $j > 3$.

$T_{0,1}$	$T_{0,2}$	$T_{0,3}$	\dots	$T_{0,M-2}$	$T_{0,M-1}$	$T_{0,M}$
$T_{1,1}$	$T_{1,2}$	$T_{1,3}$	\dots	$T_{1,M-2}$	$T_{1,M-1}$	
$T_{2,1}$	$T_{2,2}$	$T_{2,3}$	\dots	$T_{2,M-2}$		
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots			
$T_{N-2,1}$	$T_{N-2,2}$	$T_{N-2,3}$				
$T_{N-1,1}$	$T_{N-1,2}$					
$T_{N,1}$						

Cuadro 1: Representación mediante una tabla de la integración de Romberg

La expresión (37) muestra como el proceso de extrapolación de Richardson descrito anteriormente puede aplicarse de forma recurrente para calcular numéricamente una integral definida. Generalmente, los resultados de este proceso se presentan por columnas como muestra la tabla 1. Nótese que esta representación muestra claramente como se implementa este método. El proceso se inicia calculando la primera columna de acuerdo con la expresión (34). A partir de esta columna se calculan las restantes mediante la expresión general (37).

Observación 11. *La mejor aproximación al valor exacto de la integral que proporciona la integración de Romberg corresponde al coeficiente $T_{0,M}$ de la tabla 1. Recuérdese que cada columna de esta tabla corresponde a la aplicación de una fórmula compuesta. En consecuencia, fijada una columna de la tabla 1, la precisión de la aproximación al valor exacto de la integral aumenta al descender por dicha columna ya que el número de intervalos utilizados para realizar el cálculo también se incrementa. Además, cada columna puede interpretarse como la extrapolación de Richardson de la columna anterior. Por lo tanto, la precisión de la aproximación también aumenta con el número de columnas.*

3. Integración de Gauss

3.1. Planteamiento del problema

En el apartado 2 se han deducido fórmulas de integración del tipo

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) + E_n,$$

donde la posición de los $n + 1$ puntos bases de integración está predefinida de antemano (puntos equiespaciados). En general, y de acuerdo con las expresiones (13) y (20), estas fórmulas son de orden n , es decir, integran exactamente todo polinomio de grado n (recuérdese que éste era el resultado general, sin embargo, para n par se obtenía un orden de integración extra). Por tanto, fijados los $n + 1$ puntos base de integración y a partir de $n + 1$ incógnitas (los pesos de integración w_i , con $i = 0, \dots, n$) se integran exactamente polinomios de grado n , determinados por $n + 1$ coeficientes. A partir de esta reflexión surge de forma natural la siguiente pregunta: ¿es posible integrar polinomios de grado $2n + 1$ (polinomios determinados por $2n + 2$ coeficientes si tanto la posición de los $n + 1$ puntos base como los $n + 1$ pesos de integración son una incógnita? En otras palabras, si se escoge *adecuadamente* la posición de los puntos base de integración ¿es posible aumentar el orden de integración?

La respuesta es, afortunadamente, afirmativa. Con el objetivo de determinar cual es la posición *óptima* de los puntos base de integración, x_i con $i = 0, \dots, n$, y posteriormente calcular de forma natural los pesos de integración, w_i con $i = 0, \dots, n$, supóngase que se debe calcular la integral

$$I = \int_a^b w(x)f(x) dx, \tag{38}$$

donde $w(x)$ es una función de ponderación arbitraria. Obsérvese que para $w(x) = 1$ se obtiene la integral (1). En este sentido, la inclusión de la función $w(x)$ en la definición de la integral (38) permite hacer más generales los resultados que seguidamente se obtendrán.

Como en los apartados anteriores, también se supondrá que la función $f(x)$ se aproxima mediante polinomios de Lagrange (2) de forma que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x) + \frac{f^{(n+1)}(\mu)}{(n+1)!}L(x).$$

Entonces,

$$I = \int_a^b w(x)f(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b w(x)L_i(x) dx + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b w(x)f^{(n+1)}(\mu)L(x) dx.$$

Por tanto, un vez se conozcan los puntos base, los pesos de integración se calcularán como

$$w_i = \int_a^b w(x)L_i(x) dx, \quad (39)$$

y el error de integración será

$$E_n = \int_a^b w(x)f(x) dx - \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b w(x)L_i(x) dx = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b w(x)f^{(n+1)}(\mu)L(x) dx. \quad (40)$$

Puesto que el objetivo es integrar exactamente cualquier polinomio de grado $2n+1$, si la función $f(x)$ fuera un polinomio de grado $2n+1$, $f(x) = P_{2n+1}(x)$, entonces el error de integración debería ser nulo, $E_n = 0$.

En este caso, puesto que la función integrando se aproxima mediante una interpolación de Lagrange (2) y sólo se dispone de $n+1$ puntos base de integración

$$P_{2n+1}(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

donde el resto de integración, $R_n(x)$, debe ser un polinomio de grado $2n+1$ ya que siempre es posible expresar un polinomio de grado $2n+1$ como suma de un polinomio de grado n más otro de grado $2n+1$. Entonces, en este caso el error de interpolación puede descomponerse como

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\mu)}{(n+1)!} L(x) = q_n(x) L(x) \quad (41)$$

donde $L(x)$ es el polinomio de Lagrange (5), de grado $n+1$ y $q_n(x)$ es forzosamente un polinomio de grado n .

Considérese una familia de polinomios ortogonales de grado $n+1$

$$\{Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_{n-1}(x), Q_n(x)\},$$

según el producto escalar definido por

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b w(x)f(x)g(x) dx.$$

donde el polinomio $Q_i(x)$ es de grado i . Nótese que la función $w(x)$ es la misma función que aparece en la integral (38).

Puesto que toda familia de polinomios ortogonales de grado $n+1$ forman una base del subespacio vectorial de los polinomios de grado igual o inferior a $n+1$, entonces cualquier polinomio de grado igual o inferior a $n+1$ se puede expresar como combinación lineal de dicha familia de polinomios ortogonales. En particular,

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i Q_i(x) \quad (42)$$

$$q_n(x) = \sum_{i=0}^n b_i Q_i(x). \quad (43)$$

Por consiguiente, introduciendo las combinaciones lineales (42) y (43) en la descomposición (41), el error de integración (40) es

$$E_n = \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^n c_i b_j \int_a^b w(x) Q_i(x) Q_j(x) dx = \sum_{i=0}^n c_i b_i \langle Q_i(x), Q_i(x) \rangle$$

por ser $\{Q_i(x)\}$ una familia de polinomios ortogonales. Es decir, si el error de integración debe ser nulo, entonces existen dos posibilidades:

- $b_i = 0$ con $i = 0, \dots, n$. En consecuencia, $E_n = 0$, pero debido a la ecuación (43) también se cumple que $q_n(x) = 0$. Es decir, por la descomposición (41) $R_n(x) = 0$ lo cual no tiene sentido.
- $c_i = 0$ con $i = 0, \dots, n$. En este caso la integral es exacta como se deseaba.

Además, al cumplirse esta última condición, la ecuación (42) permite expresar el polinomio de Lagrange como

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i Q_i(x) = c_{n+1} Q_{n+1}(x).$$

Así mismo, por la propia definición del polinomio de Lagrange (5) éste es

$$L(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_j) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Por lo tanto, se verifica

$$(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = c_{n+1} Q_{n+1}. \quad (44)$$

Es decir, los ceros del polinomio de Lagrange son las raíces del polinomio ortogonal de grado $n + 1$, $Q_{n+1}(x)$. Nótese que la ecuación (44) indica exactamente cuáles han de ser los puntos base de integración para que el error de integración sea nulo: *los puntos base de integración han de ser los ceros del polinomio ortogonal de grado $n + 1$, $Q_{n+1}(x)$.*

A modo de resumen, el siguiente cuadro presenta el planteamiento general de la integración gaussiana.

Resumen Sea $\{Q_0(x), Q_0(x), \dots, Q_{n-1}(x), Q_n(x)\}$ una familia de polinomios ortogonales según el producto escalar

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b w(x)f(x)g(x) dx.$$

Entonces, es posible calcular la integral

$$I = \int_a^b w(x)f(x) dx = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) + E_n,$$

mediante una cuadratura de orden $2n + 1$ si los puntos de integración son los ceros del polinomio ortogonal de grado $n + 1$, $Q_{n+1}(x)$. En este caso, los pesos de integración valen

$$w_i = \int_a^b w(x)L_i(x) dx,$$

y el error de integración se puede expresar como

$$E_n = \Omega(a, b, n)f^{2n+2}(\mu), \quad \mu \in [a, b] \quad (45)$$

donde $\Omega(a, b, n)$ es una función de los límites de integración y de n .

3.2. Clasificación

De acuerdo con los resultados presentados en el subapartado anterior, la posición de los puntos base de integración, el valor de los pesos de integración y la expresión del error de integración dependen de la familia (base) de polinomios ortogonales que se utilice. Es importante resaltar que la elección de la familia de polinomios ortogonales también define implícitamente una función de peso $w(x)$ y unos límites de integración (los límites del intervalo en el que la familia de polinomios es ortogonal). En este sentido, la relación entre familias de polinomios ortogonales y fórmulas de integración gaussiana más importantes es:

Pol. ortogonales	Símbolo	Fórmula de integración	w(x)
Pol. de Legendre	$\{P_n(x)\}$	Gauss-Legendre	1
Pol. de Laguerre	$\{\hat{L}_n(x)\}$	Gauss-Laguerre	e^{-x}
Pol. de Hermite	$\{H_n(x)\}$	Gauss-Hermite	e^{-x^2}
Pol. de Chebychev	$\{T_n(x)\}$	Gauss-Chebychev	$1/\sqrt{1-x^2}$

Observación 12. Al igual que en la bibliografía, los polinomios de Laguerre se expresan como $L_i(x)$, con $i = 0, \dots, n$. Aunque esta notación coincide con la utilizada para los polinomios de Lagrange (4), el lector identificará claramente cada familia de polinomios por el contexto.

3.3. Fórmulas de Gauss-Legendre

En este tipo de integración gaussiana, se toma como familia de polinomios ortogonales los polinomios de Legendre. En la tabla 2 se presentan los cinco primeros polinomios de Legendre. Es importante recordar que los polinomios de Legendre son ortogonales según el producto escalar

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx.$$

Es decir, la particularización de la ecuación (38) a la integración de Gauss-Legendre es

$$\begin{aligned} w(x) &= 1 \\ a &= -1 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

Por consiguiente, siempre es posible expresar la integral de una función $f(x)$ sobre el intervalo $[0, 1]$ como una cuadratura más un error de integración. La fórmula resultante es conocida como fórmula de Gauss-Legendre

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) + E_n,$$

donde los puntos base de integración son los ceros del polinomio de Legendre de grado $n+1$, $P_{n+1}(x)$ y los pesos de integración se calculan según la ecuación (39)

$$w_i = \int_{-1}^1 L_i(x) dx,$$

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)
\end{aligned}$$

Cuadro 2: Polinomios de Legendre

y el término del error de integración se puede expresar de la forma determinada por la ecuación (45).

Sin embargo, en la mayoría de aplicaciones es preciso calcular la integral en un intervalo cualquiera $[a, b]$. En este caso también se puede utilizar una fórmula de Gauss-Legendre mediante el siguiente cambio de variables

$$z = \frac{2x - (a + b)}{b - a}. \quad (46)$$

Por tanto, es posible calcular la integral

$$\begin{aligned}
I &= \int_a^b f(x) dx = \frac{b - a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{z(b - a) + (a + b)}{2}\right) dz \\
&= \frac{b - a}{2} \sum_{i=0}^n w_i f\left(\frac{z_i(b - a) + (a + b)}{2}\right) + E_n,
\end{aligned}$$

donde los valores z_i están definidos sobre el intervalo $[-1, 1]$.

En el apéndice A se presenta de forma tabulada los valores de los puntos base y sus correspondientes pesos de integración para diferentes valores de n . Para todos los valores de n , los puntos base de integración (las raíces de los polinomios ortogonales de Legendre de grado $n + 1$) siempre están en el intervalo $[-1, 1]$ y que son simétricos respecto el origen ($x = 0$). Por este motivo, en la tabla del apéndice A, los puntos base con valores diferentes de cero se deben interpretar siempre como valores positivos y negativos, $\pm z_i$. Por ejemplo, para $n = 1$ se cumple:

$\pm z_i$	w_i
0,577350269189626	1,000000000000000

Entonces, los puntos base de integración son: $x_0 = -0,577350269189626$ y $x_1 = 0,577350269189626$, mientras que los pesos de integración son $w_0 = w_1 = 1,0000000000000000$.

3.4. Fórmulas de Gauss-Laguerre

En muchas aplicaciones es necesario aproximar el valor de una integral definida sobre un dominio infinito. Dado que los polinomios de Laguerre son ortogonales bajo el producto escalar

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^{\infty} e^{-x} f(x)g(x) dx,$$

su utilización para el cálculos de integrales definidas sobre el intervalo $[0, \infty)$ es ampliamente utilizada. Es decir, las fórmulas de Gauss-Laguerre son de la forma

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) + E_n,$$

donde, los puntos base de integración son los ceros del polinomio de Laguerre de grado $n+1$, $L_{n+1}(x)$, los pesos de integración se calculan según la ecuación (39)

$$w_i = \int_0^{\infty} e^{-x} L_i(x) dx,$$

y el término del error de integración se puede expresar de la forma (45). En la tabla 3 se presentan los primeros cinco polinomios de Laguerre.

$$\begin{aligned} \hat{L}_0(x) &= 1 \\ \hat{L}_1(x) &= 1 - x \\ \hat{L}_2(x) &= 2 - 4x + x^2 \\ \hat{L}_3(x) &= 6 - 18x + 9x^2 - x^3 \\ \hat{L}_4(x) &= 24 - 96x + 72x^2 - 16x^3 + x^4 \end{aligned}$$

Cuadro 3: Polinomios de Laguerre

Nótese que la expresión de la integración de Gauss-Laguerre se ha obtenido al hacer

$$\begin{aligned} w(x) &= e^{-x} \\ a &= 0 \\ b &= \infty \end{aligned}$$

en la ecuación (38). Para calcular la integral sobre un dominio $[a, \infty)$, siendo a un valor finito, basta con aplicar el cambio de variable

$$z = x - a,$$

de forma que

$$I = \int_a^\infty f(x) dx = \int_0^\infty e^{-z} e^z f(z + a) dz = \sum_{i=0}^n w_i e^{z_i} f(z_i + a) + E_n.$$

En el apéndice A se presentan tabulados los valores de los puntos base y de los pesos de integración para diferentes fórmulas de Gauss-Laguerre. Los valores que aparecen entre paréntesis delante de los pesos de integración deben interpretarse de la siguiente manera. Sea a dicho número y b el valor que aparece en la columna asociada al peso de integración. Entonces el valor real del peso de integración es $b \cdot 10^a$. Adicionalmente, también se muestran los valores del producto $w_i e^{z_i}$ para las aplicaciones al cálculo de integrales sobre un dominio $[a, \infty]$. Por ejemplo, para $n = 1$ se cumple:

z_i	w_i	$w_i e^{z_i}$
0,585786437627	(-1) 8,53553390593	1,53332603312
3,414213562373	(-1) 1,46446609407	4,45095733505

Entonces, los puntos base de integración son $x_0 = 0,585786437627$ y $x_1 = 3,414213562373$; los pesos de integración son $w_0 = 0,853553390593$ y $w_1 = 0,146446609407$; y los productos $w_0 e^{z_0} = 1,53332603312$ y $w_1 e^{z_1} = 4,45095733505$.

3.5. Fórmulas de Gauss-Hermite

También es posible utilizar una familia de polinomios ortogonales para evaluar integrales en el dominio $[-\infty, \infty]$. En este caso particular son especialmente indicados los polinomios de Hermite ya que son ortogonales según el producto escalar

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)g(x) dx.$$

En la tabla 4 se presentan los primeros cinco polinomios de Hermite. Por lo tanto, si en la ecuación (38) se hace

$$\begin{aligned} w(x) &= e^{-x^2} \\ a &= -\infty \\ b &= \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= 1 \\
H_1(x) &= 2x \\
H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\
H_3(x) &= 8x^3 - 12x \\
H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12
\end{aligned}$$

Cuadro 4: Polinomios de Hermite

se obtiene la expresión para las fórmulas de Gauss-Hermite

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dz = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) + E_n.$$

Como en las fórmulas gaussianas anteriores, los pesos de integración se calculan según la ecuación (39)

$$w_i = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} L_i(x) dx,$$

y el término del error de integración se puede expresar de la forma (45). Obsérvese que la fórmula de Gauss-Hermite puede aplicarse al cálculo de la integral de una función $f(x)$ cualquiera puesto que

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} e^{z^2} f(z) dz = \sum_{i=0}^n w_i e^{z_i^2} f(z_i) + E_n.$$

En el apéndice A se presentan tabulados los valores de los puntos base y de los pesos de integración para diferentes fórmulas de Gauss-Hermite. Como en la integración de Gauss-Laguerre, el valor real de los pesos de integración se obtiene multiplicando $b \cdot 10^a$, donde a representa los valores que aparecen entre paréntesis delante de los pesos de integración y b el valor que aparece en la columna de los pesos de integración. Así mismo, también se muestran los valores del producto $w_i e^{z_i^2}$ para las aplicaciones al cálculo de la integral de una función cualquiera. Concretamente, para $n = 1$ se verifica:

$\pm z_i$	w_i	$\pm w_i e^{z_i^2}$
0,707106781166548	(-1) 8,862269254528	1,4611411826611

Entonces, los puntos base de integración son $x_0 = -0,707106781166548$ y $x_1 = 0,707106781166548$; los pesos de integración son $w_0 = w_1 = 0,8862269254528$; y los productos $w_0 e^{z_0^2} = -1,4611411826611$ y $w_1 e^{z_1^2} = 1,4611411826611$.

3.6. Fórmulas de Gauss-Chebyshev

Los polinomios de Chebyshev también son ampliamente utilizados en las fórmulas gaussianas de integración. En la tabla 5 se presentan los primeros cinco polinomios de Chebyshev. Estos polinomios son ortogonales bajo el producto escalar

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x) dx.$$

Es decir, su utilización permite calcular integrales de la forma (38) cuando

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ a &= -1 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \end{aligned}$$

Cuadro 5: Polinomios de Chebyshev

Por consiguiente, mediante la integración de Gauss-Chebyshev se obtiene

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) + E_n,$$

donde los $n+1$ puntos base de integración son las raíces de los polinomios de Chebyshev de grado $n+1$, $T_{n+1}(x)$. Es importante recordar que estos ceros pueden calcularse de forma explícita como

$$x_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right) \quad i = 0, \dots, n$$

Además, los pesos de integración también se pueden calcular analíticamente puesto que

$$w_i = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} L_i(x) dx = \frac{\pi}{n+1} \quad i = 0, \dots, n$$

y el error de integración se puede expresar de la forma (45).

La integración de Gauss-Chebyshev también se puede extender a un dominio de integración $[a, b]$ cualquiera mediante el cambio de variable (46). Es decir,

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{z(b-a) + (a+b)}{2}\right) dz \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \sqrt{1-z^2} f\left(\frac{z(b-a) + (a+b)}{2}\right) dz \\ &= \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^n w_i \sqrt{1-z_i^2} f\left(\frac{z_i(b-a) + (a+b)}{2}\right) + E_n. \end{aligned}$$

Fórmulas cerradas de Newton-Cotes

$$\begin{aligned}
 n = 1 \quad \int_a^b f(x) dx &= \frac{h}{2} (f_0 + f_1) - \frac{1}{12} h^3 f^{(2)}(\mu) \\
 n = 2 \quad \int_a^b f(x) dx &= \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2) - \frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\mu) \\
 n = 3 \quad \int_a^b f(x) dx &= \frac{3h}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) - \frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\mu) \\
 n = 4 \quad \int_a^b f(x) dx &= \frac{2h}{45} (7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4) - \frac{8}{945} h^7 f^{(6)}(\mu) \\
 n = 5 \quad \int_a^b f(x) dx &= \frac{5h}{288} (19f_0 + 75f_1 + 50f_2 + 50f_3 + 75f_4 + 19f_5) \\
 &\quad - \frac{275}{12096} h^7 f^{(6)}(\mu) \\
 n = 6 \quad \int_a^b f(x) dx &= \frac{h}{140} (41f_0 + 216f_1 + 27f_2 + 272f_3 + 27f_4 \\
 &\quad + 216f_5 + 41f_6) - \frac{9}{1400} h^9 f^{(8)}(\mu) \\
 n = 7 \quad \int_a^b f(x) dx &= \frac{7h}{1728} (751f_0 + 3577f_1 + 1323f_2 + 2989f_3 \\
 &\quad + 2989f_4 + 1323f_5 + 3577f_6 + 751f_7) - \frac{8183}{518400} h^9 f^{(8)}(\mu) \\
 n = 8 \quad \int_a^b f(x) dx &= \frac{4h}{14175} (989f_0 + 5888f_1 - 928f_2 + 10496f_3 \\
 &\quad - 4540f_4 + 10496f_5 - 928f_6 + 5888f_7 + 989f_8) \\
 &\quad - \frac{2368}{467775} h^{11} f^{(10)}(\mu) \\
 n = 9 \quad \int_a^b f(x) dx &= \frac{9h}{89600} (2857(f_0 + f_9) + 15741(f_1 + f_8) \\
 &\quad + 1080(f_2 + f_7) - 19344(f_3 + f_6) + 5778(f_4 + f_5)) \\
 &\quad - \frac{173}{14620} h^{11} f^{(10)}(\mu) \\
 n = 10 \quad \int_a^b f(x) dx &= \frac{5h}{299376} (16067(f_0 + f_{10}) + 106300(f_1 + f_9) \\
 &\quad - 48525(f_2 + f_8) + 272400(f_3 + f_7) - 260550(f_4 + f_6) \\
 &\quad + 427368f_5) - \frac{1346350}{326918592} h^{13} f^{(12)}(\mu)
 \end{aligned}$$

Fórmulas abiertas de Newton-Cotes

$$n = 0 \quad \int_a^b f(x) dx = 2hf_0 + \frac{1}{3} h^3 f^{(2)}(\mu)$$

$$n = 1 \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{3h}{2} (f_0 + f_1) + \frac{3}{4} h^3 f^{(2)}(\mu)$$

$$n = 2 \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{4h}{3} (2f_0 - f_1 + 2f_2) + \frac{28}{90} h^5 f^{(4)}(\mu)$$

$$n = 3 \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{5h}{24} (11f_0 + f_1 + f_2 + 11f_3) + \frac{95}{144} h^5 f^{(4)}(\mu)$$

$$n = 4 \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{6h}{20} (11f_0 - 14f_1 + 26f_2 - 14f_3 + 11f_4) \\ + \frac{41}{140} h^7 f^{(6)}(\mu)$$

$$n = 5 \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{7h}{1440} (611f_0 - 453f_1 + 562f_2 + 562f_3 - 453f_4 \\ + 611f_5) + \frac{5257}{8640} h^7 f^{(6)}(\mu)$$

$$n = 6 \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{8h}{945} (460f_0 - 954f_1 + 2196f_2 - 2459f_3 + 2196f_4 \\ - 954f_5 + 460f_6) + \frac{3956}{14175} h^9 f^{(8)}(\mu)$$

Cuadraturas de Gauss- Legendre

$\pm z_i$	W_i	$\pm z_i$	W_i
n=1		n=15	
0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000	0.09501 25098 37637 440165	0.18945 06104 55068 496285
n=2		n=19	
0.00000 00000 00000	0.88888 88888 88889	0.28160 35507 79258 913230	0.18260 34150 44923 588867
0.77459 66692 41483	0.55555 55555 55556	0.45801 67776 57227 386342	0.16915 65193 95002 538189
n=3		n=23	
0.33998 10435 84856	0.65214 51548 62546	0.61787 62444 02643 748447	0.14959 59688 16576 732081
0.86113 63115 94053	0.34785 48451 37454	0.75540 44083 55003 033895	0.12462 89712 55533 872052
n=4		n=27	
0.00000 00000 00000	0.56888 88886 88869	0.66563 12023 87831 743880	0.09515 85116 82492 764810
0.53846 93101 05683	0.47862 86704 99366	0.94457 50230 73232 576078	0.06225 35239 38647 892663
0.90617 98459 38664	0.23692 68850 56189	0.96940 09349 91649 932596	0.02715 24594 11754 094852
n=5		n=31	
0.23861 91860 83197	0.46791 39345 72691	0.07652 65211 33497 333755	0.15275 33871 30725 850698
0.66120 93864 66265	0.36076 15730 48139	0.22778 58511 41645 076080	0.14917 29864 72603 746788
0.93246 95142 03152	0.17132 44923 79170	0.37370 60887 15419 560673	0.14209 61093 18382 051329
n=6		n=35	
0.00000 00000 00000	0.41795 91836 73469	0.51086 70019 50827 098004	0.13168 86384 49176 626898
0.40584 51513 77397	0.38183 00505 05119	0.63605 36807 26515 025453	0.11819 45319 61518 417312
0.74153 11855 99394	0.27970 53914 89277	0.74633 19064 60150 792614	0.10193 01198 17240 435037
0.94910 79123 42759	0.12948 49661 68870	0.83911 69718 22218 823395	0.08327 67415 76704 746725
n=7		n=39	
0.18343 46424 95650	0.36268 37833 78362	0.91223 44282 51325 905868	0.06267 20463 34109 063570
0.52553 24099 16329	0.31370 66458 77887	0.96397 19272 77913 791268	0.04060 14296 00386 941331
0.79666 64774 13627	0.22238 10344 53374	0.99312 85991 65094 924786	0.01761 40071 39152 118312
0.96028 98564 97536	0.10122 85362 90376	n=43	
n=8		n=47	
0.00000 00000 00000	0.33023 93550 01260	0.06405 68928 62605 626065	0.12793 81953 46752 156974
0.32425 34234 03809	0.31234 70770 40003	0.19111 88674 73616 309159	0.12583 74563 46828 296121
0.61337 14327 00590	0.26061 06964 02935	0.31504 26796 96163 374387	0.12167 04729 27803 391204
0.83603 11073 26636	0.16064 81606 94857	0.43379 35076 26045 138487	0.11550 56680 53725 661353
0.96816 02395 07626	0.03127 43883 61574	0.54542 14713 68839 535658	0.10744 42701 15965 634783
n=9		n=51	
0.14887 43389 81631	0.29552 42247 14753	0.64809 36519 36975 569252	0.09761 86521 04113 888270
0.43339 53941 29247	0.26926 67193 09996	0.74012 41915 78554 364244	0.08619 01615 31953 275917
0.67940 95682 99024	0.21908 63625 15982	0.82000 19859 73902 921954	0.07334 64814 11080 305734
0.86500 33666 88985	0.14945 13491 50581	0.88641 55270 04401 034213	0.05929 65649 15436 760746
0.97390 65285 17172	0.06667 13443 08688	0.93827 45520 02732 758524	0.04427 74388 17419 806169
n=11		n=55	
0.12523 34085 11469	0.24914 70458 13403	0.97472 85559 71309 498198	0.02853 13886 28933 663181
0.36783 14989 98180	0.23349 25365 38355	0.99518 72199 97021 360180	0.01234 12297 99987 199547
0.58731 79542 86617	0.20316 74267 23066		
0.76990 26741 94305	0.16007 83285 43346		
0.90411 72563 70475	0.10693 93259 95318		
0.98156 06342 46719	0.04717 53363 86512		

Cuadraturas de Gauss-Laguerre

z_i	W_i	$W_i \exp(z_i)$	z_i	W_i	$W_i \exp(z_i)$
n=1					
0.58578 64376 27	(-1) 8.53553 390593	1.53332 603312	0.15232 22277 32	(-1) 3.36126 421798	0.39143 1124316
3.41421 35623 73	(-1) 1.46446 609407	4. 45095 733505	0.80722 00227 42	(-1) 4.11213 980424	0.92180 5028529
n=2					
0.41577 45567 83	(-1) 7.11093 009929	1.07769 285927	2.00513 51556 19	(-1) 1.99287 525371	1.48012 790994
2.29428 03602 79	(-1) 2.78517 733569	2.76214 296190	3.78347 39733 31	(-2) 4.74605 627657	2.08677 080755
6.28994 50829 37	(-2) 1.03892 565016	5.61019 462543	6.20495 67778 77	(-3) 5.59962 661079	2.77292 138971
n=3					
0.32254 76896 19	(-1) 6.03154 104342	0.83273 9123838	9.37298 52516 88	(-4) 3.05249 767093	3.59162 606809
1.74576 11011 58	(-1) 3.57418 692438	2.04810 243845	13.46823 69110 92	(-6) 6.59212 302608	4.64876 600214
4.53662 02969 21	(-2) 3.88879 085150	3.63114 630582	18.83359 77889 92	(-8) 4.11076 933035	6.21227 541975
9.39507 09123 01	(-4) 5.39294 705561	6.48714 508441	26.37407 18909 27	(-11) 3.29087 403035	9.36321 823771
n=4					
0.26356 03197 18	(-1) 5.21755 610583	0.67909 4042208	0.13779 34705 40	(-1) 3.08441 115765	0.35400 9738607
1.41340 30591 07	(-1) 3.98666 811083	1.63848 787360	0.72945 45495 03	(-1) 4.01119 929155	0.83190 230144
3.59642 57710 41	(-2) 7.59424 496817	2.76944 324237	1.80834 29017 40	(-1) 2.18068 287612	1.33028 856175
7.08581 00058 59	(-3) 3.61175 867992	4.31565 690092	3.40143 36978 55	(-2) 6.20874 460987	1.86306 390311
12.64080 08442 76	(-5) 2.33699 723858	7.21918 635435	5.55249 61400 64	(-3) 9.50151 697518	2.45025 558908
n=5					
0.22284 66041 79	(-1) 4.58964 673950	0.57353 5507423	8.33015 27467 64	(-4) 7.53008 388588	3.12276 415514
1.18893 21016 73	(-1) 4.17000 830772	1.36925 259071	11.84378 58379 00	(-5) 2.82592 334960	3.93415 269556
2.99273 63260 59	(-1) 1.13373 382074	2.26068 459338	16.27925 78313 78	(-7) 4.24931 398496	4.99241 487219
5.77514 35691 05	(-2) 1.03991 974531	3.35052 458236	21.99658 58119 81	(-9) 1.83956 492398	6.57220 248513
9.83746 74183 83	(-4) 2.61017 202815	4.88682 680021	29.92069 70122 74	(-13) 9.91182 721961	9.78469 584037
15.98287 39806 02	(-7) 8.98547 906430	7.84901 594560	0.11572 21173 56	(-1) 2.64731 371055	0.29920 9636044
n=6					
0.19304 36765 60	(-1) 4.05918 951701	0.49647 7597540	0.61175 74845 15	(-1) 3.77759 275873	0.69646 2980431
1.02666 48953 39	(-1) 4.21831 277862	1.17764 306086	1.51261 02697 76	(-1) 2.44082 011320	1.10778 139462
2.56787 67449 51	(-1) 1.47126 348658	1.91824 978166	2.83375 13377 44	(-2) 9.04492 222117	1.53846 423904
4.90035 30845 26	(-2) 2.06335 144687	2.77184 863623	4.59922 76394 18	(-2) 2.01023 815546	1.99832 766627
8.18215 34445 63	(-3) 1.07401 014328	3.84124 912249	6.84452 54531 15	(-3) 2.66397 354187	2.50074 576910
12.73418 02917 98	(-5) 1.58654 643486	5.38067 820792	9.62131 68424 57	(-4) 2.03231 592663	3.06532 151828
19.39572 78622 63	(-8) 3.17031 547900	8.40543 248683	13.00605 49933 06	(-6) 8.36505 585682	3.72328 911078
n=7					
0.17027 96323 05	(-1) 3.69188 589342	0.43772 3410493	17.11885 51874 62	(-7) 1.66849 387654	4.52991 402998
0.90370 17767 99	(-1) 4.18786 780814	1.03386 934767	22.15109 03793 97	(-9) 1.34239 103052	5.59725 846184
2.25108 66298 66	(-1) 1.75794 984637	1.66970 976566	28.48796 72509 84	(-12) 3.06160 163504	7.71299 546093
4.26670 01702 88	(-2) 3.33434 922612	2.37692 470176	37.09912 10444 67	(-16) 8.14807 746743	10.54383 074619
7.04590 54023 93	(-3) 2.39453 623523	3.20854 091335	0.09330 78120 17	(-1) 2.18234 895940	0.23857 8170311
10.75851 60101 81	(-5) 9.07650 877336	4.26857 551083	0.49269 17403 02	(-1) 3.42210 177923	0.56010 0842793
15.74067 86412 78	(-7) 8.48574 671627	5.81808 336867	1.21559 54120 71	(-1) 2.63027 577942	0.88700 8262919
22.86313 17368 89	(-9) 1.04800 117487	8.90622 621529	2.26994 95262 04	(-1) 1.26425 818106	1.22366 440215
n=8					
0.15232 22277 32	(-1) 3.36126 421798	0.39143 1124316	3.66762 27217 51	(-2) 4.02068 649210	1.57444 872163
0.80722 00227 42	(-1) 4.11213 980424	0.92180 5028529	5.42533 66274 14	(-3) 8.56387 780361	1.94475 197653
2.00513 51556 19	(-1) 1.99287 525371	1.48012 790994	7.56591 62266 13	(-3) 1.21243 614721	2.34150 205664
3.78347 39733 31	(-2) 4.74605 627657	2.08677 080755	10.12022 85680 19	(-4) 1.11674 392344	2.77404 192263
6.20495 67778 77	(-3) 5.59962 661079	2.77292 138971	13.13028 24821 76	(-6) 6.45992 676202	3.25564 334640
9.37298 52516 88	(-4) 3.05249 767093	3.59162 606809	16.65440 77083 30	(-7) 2.22631 690710	3.80631 171423
13.46823 69110 92	(-6) 6.59212 302608	4.64876 600214	20.77647 88994 49	(-9) 4.22743 038498	4.45847 775384
18.83359 77889 92	(-8) 4.11076 933035	6.21227 541975	25.62389 42267 29	(-11) 3.92189 726704	5.27001 778443
26.37407 18909 27	(-11) 3.29087 403035	9.36321 823771	31.40751 91697 54	(-13) 1.45651 526407	6.35956 346973
n=9					
0.13779 34705 40	(-1) 3.08441 115765	0.35400 9738607	38.53068 33064 86	(-16) 1.48302 705111	8.03178 763212
0.72945 45495 03	(-1) 4.01119 929155	0.83190 230144	48.02608 55726 86	(-20) 1.60059 490621	11.52777 021009
1.80834 29017 40	(-1) 2.18068 287612	1.33028 856175			
3.40143 36978 55	(-2) 6.20874 460987	1.86306 390311			
5.55249 61400 64	(-3) 9.50151 697518	2.45025 558908			
8.33015 27467 64	(-4) 7.53008 388588	3.12276 415514			
11.84378 58379 00	(-5) 2.82592 334960	3.93415 269556			
16.27925 78313 78	(-7) 4.24931 398496	4.99241 487219			
21.99658 58119 81	(-9) 1.83956 492398	6.57220 248513			
29.92069 70122 74	(-13) 9.91182 721961	9.78469 584037			
n=11					
0.11572 21173 56	(-1) 2.64731 371055	0.29920 9636044			
0.61175 74845 15	(-1) 3.77759 275873	0.69646 2980431			
1.51261 02697 76	(-1) 2.44082 011320	1.10778 139462			
2.83375 13377 44	(-2) 9.04492 222117	1.53846 423904			
4.59922 76394 18	(-2) 2.01023 815546	1.99832 766627			
6.84452 54531 15	(-3) 2.66397 354187	2.50074 576910			
9.62131 68424 57	(-4) 2.03231 592663	3.06532 151828			
13.00605 49933 06	(-6) 8.36505 585682	3.72328 911078			
17.11885 51874 62	(-7) 1.66849 387654	4.52991 402998			
22.15109 03793 97	(-9) 1.34239 103052	5.59725 846184			
28.48796 72509 84	(-12) 3.06160 163504	7.71299 546093			
37.09912 10444 67	(-16) 8.14807 746743	10.54383 074619			
n=14					
0.09330 78120 17	(-1) 2.18234 895940	0.23857 8170311			
0.49269 17403 02	(-1) 3.42210 177923	0.56010 0842793			
1.21559 54120 71	(-1) 2.63027 577942	0.88700 8262919			
2.26994 95262 04	(-1) 1.26425 818106	1.22366 440215			
3.66762 27217 51	(-2) 4.02068 649210	1.57444 872163			
5.42533 66274 14	(-3) 8.56387 780361	1.94475 197653			
7.56591 62266 13	(-3) 1.21243 614721	2.34150 205664			
10.12022 85680 19	(-4) 1.11674 392344	2.77404 192263			
13.13028 24821 76	(-6) 6.45992 676202	3.25564 334640			
16.65440 77083 30	(-7) 2.22631 690710	3.80631 171423			
20.77647 88994 49	(-9) 4.22743 038498	4.45847 775384			
25.62389 42267 29	(-11) 3.92189 726704	5.27001 778443			
31.40751 91697 54	(-13) 1.45651 526407	6.35956 346973			
38.53068 33064 86	(-16) 1.48302 705111	8.03178 763212			
48.02608 55726 86	(-20) 1.60059 490621	11.52777 021009			

Cuadraturas de Gauss-Hermite

$\pm z_i$	W_i	$W_i \exp(-z_i^2)$	$\pm z_i$	W_i	$W_i \exp(-z_i^2)$
n=1					
0.70710 67811 66548	(-1) 8.86226 92545 28	1.46114 11826 611	0.34290 13272 23705	(-1) 6.10862 63373 53	0.68708 18539 513
n=2					
0.00000 00000 00000	(0) 1.18163 59006 04	1.18163 59006 037	1.03661 08297 89514	(-1) 2.40138 61108 23	0.70329 63231 049
1.22474 48713 91589	(-1) 2.95408 97515 09	1.32393 11752 136	1.75668 06492 99882	(-2) 3.28743 94455 48	0.74144 19319 436
n=3					
0.52464 76232 75290	(-1) 8.04914 09000 55	1.05996 44828 950	2.53273 16742 32790	(-3) 1.34364 57467 81	0.82066 63264 048
1.65068 01238 85785	(-2) 8.13128 35447 25	1.24022 58176 958	3.43615 91188 37738	(-6) 7.64043 28552 33	1.02545 16913 657
n=4					
0.00000 00000 00000	(-1) 9.45308 72048 29	0.94530 87204 829	0.31424 03762 54359	(-1) 5.70135 23626 25	0.62930 78743 695
0.95857 24646 13819	(-1) 3.93619 32315 22	0.98658 09967 514	0.94778 83912 40164	(-1) 2.60492 31026 42	0.63962 13230 203
2.02018 28704 56086	(-2) 1.99532 42059 05	1.18146 86255 360	1.59768 26351 52605	(-2) 5.16079 85615 88	0.66266 27732 669
n=5					
0.43607 74119 27617	(-1) 7.24629 59522 44	0.87640 13344 362	2.27950 70805 01060	(-3) 3.90539 05846 29	0.70522 03661 122
1.33584 90740 13697	(-1) 1.57067 32032 29	0.93558 05576 312	3.02063 70251 20890	(-5) 8.57368 70435 88	0.78664 39394 633
2.35060 49736 74492	(-2) 4.53000 94055 09	1.13690 83326 745	3.88972 48978 69782	(-7) 2.65855 16843 56	0.98969 90470 923
n=6					
0.00000 00000 00000	(-1) 8.10264 61755 68	0.81026 46175 568	0.27348 10461 3815	(-1) 5.07929 47901 66	0.54737 52050 378
0.61628 78828 58965	(-1) 4.25607 25261 01	0.82668 73032 836	0.82295 14491 4466	(-1) 2.80647 45852 85	0.55244 19573 675
1.67355 16287 67471	(-2) 5.45155 82819 13	0.89718 46002 252	1.38025 85391 9888	(-2) 8.38100 41398 99	0.56321 78290 882
2.65196 13568 35233	(-4) 9.71781 24509 95	1.10133 07296 103	1.95178 79909 1625	(-2) 1.28803 11535 51	0.58124 72754 009
n=7					
0.38118 69902 07322	(-1) 6.61147 01285 82	0.76654 41286 517	2.54620 21578 4748	(-4) 9.32284 09862 42	0.60973 69582 560
1.15719 37124 46780	(-1) 2.07802 32581 49	0.79289 00483 864	3.17699 91619 7996	(-5) 2.71186 00925 38	0.65575 56728 761
1.98165 67566 95843	(-2) 1.70779 83007 41	0.86675 26065 434	3.86944 79048 6012	(-7) 2.32098 08448 65	0.73824 56222 777
2.93063 74202 57244	(-4) 1.99604 07221 14	1.07193 01442 480	4.68873 89393 0582	(-10) 2.65480 74740 11	0.93687 44928 841
n=8					
0.00000 00000 00000	(-1) 7.20235 21560 61	0.72023 50156 061	0.24534 07083 009	(-1) 4.62243 66960 06	0.49092 15006 667
0.72355 10187 52638	(-1) 4.32651 55900 26	0.73030 24527 451	0.73747 37285 454	(-1) 2.86675 50536 28	0.49384 33852 721
1.68855 32892 16668	(-2) 8.84745 27394 38	0.76460 81250 946	1.23407 62153 953	(-1) 1.09017 20602 00	0.49992 08713 363
n=9					
0.34290 13272 23705	(-1) 6.10862 63373 53	0.68708 18539 513	1.73853 77121 166	(-2) 2.48105 20887 46	0.50587 90271 175
1.03661 08297 89514	(-1) 2.40138 61108 23	0.70329 63231 049	2.25497 40020 893	(-3) 3.24377 33422 38	0.52408 03509 486
1.75668 06492 99882	(-2) 3.28743 94455 48	0.74144 19319 436	2.78880 60584 281	(-4) 2.28338 63601 63	0.54485 17423 644
2.53273 16742 32790	(-3) 1.34364 57467 81	0.82066 63264 048	3.34785 45673 832	(-6) 7.80255 64785 32	0.57526 24428 525
3.43615 91188 37738	(-6) 7.64043 28552 33	1.02545 16913 657	3.94476 40401 156	(-7) 1.08606 93707 69	0.62227 86961 914
n=11					
0.31424 03762 54359	(-1) 5.70135 23626 25	0.62930 78743 695	4.60368 24495 507	(-10) 4.39934 09922 73	0.70433 29611 769
0.94778 83912 40164	(-1) 2.60492 31026 42	0.63962 13230 203	5.38748 08900 112	(-13) 2.22939 36455 34	0.89859 19614 532
1.59768 26351 52605	(-2) 5.16079 85615 88	0.66266 27732 669			
2.27950 70805 01060	(-3) 3.90539 05846 29	0.70522 03661 122			
3.02063 70251 20890	(-5) 8.57368 70435 88	0.78664 39394 633			
3.88972 48978 69782	(-7) 2.65855 16843 56	0.98969 90470 923			
n=15					
0.27348 10461 3815	(-1) 5.07929 47901 66	0.54737 52050 378			
0.82295 14491 4466	(-1) 2.80647 45852 85	0.55244 19573 675			
1.38025 85391 9888	(-2) 8.38100 41398 99	0.56321 78290 882			
1.95178 79909 1625	(-2) 1.28803 11535 51	0.58124 72754 009			
2.54620 21578 4748	(-4) 9.32284 09862 42	0.60973 69582 560			
3.17699 91619 7996	(-5) 2.71186 00925 38	0.65575 56728 761			
3.86944 79048 6012	(-7) 2.32098 08448 65	0.73824 56222 777			
4.68873 89393 0582	(-10) 2.65480 74740 11	0.93687 44928 841			
n=19					
0.24534 07083 009	(-1) 4.62243 66960 06	0.49092 15006 667			
0.73747 37285 454	(-1) 2.86675 50536 28	0.49384 33852 721			
1.23407 62153 953	(-1) 1.09017 20602 00	0.49992 08713 363			
1.73853 77121 166	(-2) 2.48105 20887 46	0.50587 90271 175			
2.25497 40020 893	(-3) 3.24377 33422 38	0.52408 03509 486			
2.78880 60584 281	(-4) 2.28338 63601 63	0.54485 17423 644			
3.34785 45673 832	(-6) 7.80255 64785 32	0.57526 24428 525			
3.94476 40401 156	(-7) 1.08606 93707 69	0.62227 86961 914			
4.60368 24495 507	(-10) 4.39934 09922 73	0.70433 29611 769			
5.38748 08900 112	(-13) 2.22939 36455 34	0.89859 19614 532			

Referencias

- [1] Bauer F.L., Rutishauser H. y Stiefel, E., (1963), New Aspects in Numerical Quadrature, *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, XV*, American Mathematical Society, Providence, pp. 199-218.
- [2] Burden, R.L. y Faires, J.D., (1998), *Análisis Numérico*, International Thomson Editores, México.
- [3] Davis, P.J. y Rabinowitz, P. (1984), *Methods of Numerical Integration (second edition)*, Academic Press.
- [4] Huerta A., Sarrate, J. y Rodríguez-Ferran, A., (2001), *Métodos Numéricos. Introducción, Aplicaciones y Programación (tercera edición)*, Colección Aula Politécnica. Edicions UPC. Barcelona.
- [5] Isaacson, E. y Keller, H.B. (1966), *Analysis of Numerical Methods*, John Wiley and Sons.
- [6] Kincaid, D. y Cheney, W. (1994), *Análisis numérico. Las matemáticas del cálculo científico*, Addison-Wesley Iberoamericana. Wilmington, Delaware.
- [7] Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A. y Vetterling, W.T. (1996), *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing (second edition)*, Cambridge University Press. Cambridge.
- [8] Ralston, A. y Rabinowitz, P. (1978), *A First Course in Numerical Analysis (second edition)*, McGraw-Hill. New York.
- [9] Stoer, J. y Bulirsch, R. (1993), *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag. New York