Aproximación funcional. Interpolación polinómica

Laboratori de Càlcul Numèric (LaCàN)
Departament de Matemàtica Aplicada III
Universitat Politècnica de Catalunya (Barcelona)
http://www-lacan.upc.es

Introducción

OBJETIVO: aproximar una función f(x) por otra función p(x) en un intervalo [a,b]

$$p(x) \simeq f(x)$$

- Datos: valor de la función f en unos puntos

$$f(x_i),\ i = 0, \ldots, n$$

- Criterio de aproximación: interpolación

$$p(x_i) = f(x_i),\ i = 0, \ldots, n$$

- Tipo de aproximante: polinómico

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Propiedades de los polinomios I

- Estructura de espacio vectorial: P_n es el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a n

$$P_n = \left\langle 1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n \right\rangle$$

P_n es un espacio de dimensión n+1.

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n$$

- Evaluación de polinomios: si usamos la expresión anterior para evaluar p(x) en un punto, se realizan n(n+1)/2 productos i n+1 sumas.

  Para reducir el coste se usa la regla de Horner.

...

Propiedades de los polinomios II

El coste se puede reducir a 2n-1 productos i n sumas utilizando una variable auxiliar para almacenar x^{i-1}.

Regla de Horner: cálculo en n sumas y n productos.

$$p_n(\hat{x}) = a_0 + \hat{x}\left(a_1 + \hat{x}\left(a_2 + \hat{x}\left(\cdots + \hat{x}\left(a_{n-1} + \hat{x} a_n\right)\right)\right)\right)$$

```
function px=evaluacion_polinomio(x,a,n)

px = a(1)+a(2)*x;
xi = x;
for i = 2 : n
    xi = xi*x;
    px = px + a(i+1)*xi;
end
```

```
function px=evaluacion_Horner(x,a,n)

px = a(n)+x*a(n+1);
for i = n-2 : -1 : 0
    px = a(i+1)+x*px;
end
```

Teorema fundamental del álgebra I

- Garantiza la existencia y unicidad del polinomio interpolador

Teorema. *Sea $(x_i, f(x_i))$ con $i = 0, \dots, n$ un conjunto de $n+1$ puntos tales que $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$ (abscisas diferentes). Entonces, existe un único polinomio $p_n(x)$ de grado menor o igual que n tal que $p(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0, \dots, n$.*

Demostración

La demostración es constructiva. Consideramos

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

Entonces

$$p(x_i) = f(x_i) \text{ para } i = 0, \dots, n$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j = f(x_i) \qquad \text{para } i = 0, \dots, n$$

...

Teorema fundamental del álgebra II

Las n+1 ecuaciones dan lugar al sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

La matriz del sistema es una *matriz de Vandermonde*. Su determinante es:

$$\prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

que es distinto de cero si todas las x_i son distintas.

Por lo tanto, el sistema es compatible determinado y admite una única solución.

Interpolación de Lagrange I

- El teorema fundamental del álgebra nos garantiza que el polinomio interpolador existe y es único. Además nos da una manera constructiva de encontrarlo (ec. 1)
  - Inconvenientes: la matriz de Vandermonde es mal condicionada
  - No tenemos información sobre el resto de Lagrange:

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

- En la práctica se usan otros métodos para obtener el polinomio interpolador (se trabaja con bases de polinomios distintas) → Interpolación de Lagrange

Interpolación de Lagrange II

Consideramos $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j L_j(x)$

Entonces, $p(x_i) = f(x_i) \ para \ i = 0, \ldots, n$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{j=0}^{n} a_j L_j(x_i) = f(x_i) \quad \text{para } i = 0, \ldots, n$$

dando lugar al sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} L_0(x_0) & L_1(x_0) & \cdots & L_n(x_0) \\ L_0(x_1) & L_1(x_1) & \cdots & L_n(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_0(x_n) & L_1(x_n) & \cdots & L_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{Bmatrix}$$

La base de los polinomios de Lagrange se elige de manera que la matriz resultante sea la identidad

Interpolación de Lagrange III

La matriz es la identidad si $L_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Los polinomios que verifican la propiedad anterior son:

$$L_i(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)} = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

En este caso, como la matriz es la identidad tenemos que $a_i = f(x_i)$ y, por lo tanto,

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

Interpolación de Lagrange IV

- RESTO DE LAGRANGE: el resto de Lagrange es el error que se comete al aproximar la función f(x) por p_n(x)

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

Teorema. *Sea $f(x)$ una función de clase $\mathcal{C}^{n+1}$ y sea $p_n(x)$ el polinomio interpolador puro que verifica $p_n(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0, \ldots, n$. Sea $R_n(x)$ el error de $p_n(x)$ como aproximante de $f(x)$, $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$. Dicho resto de Lagrange $R_n(x)$ puede expresarse como*

$$R_n(x) = L(x)\frac{f^{n+1)}(\mu)}{(n+1)!},$$

con $\mu \in [x_0, x_1, \cdots, x_n, x]$ y

$$L(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n).$$

Paradoja de Runge

Runge's phenomenon

From Wikipedia, the free encyclopedia

In the mathematical field of numerical analysis **Runge's phenomenon** is a problem which occurs when using polynomial interpolation with polynomials of high degree. It was discovered by Carle David Tolmé Runge when exploring the behaviour of errors when using polynomial interpolation to approximate certain functions.

Problem

[edit]

Consider the function:

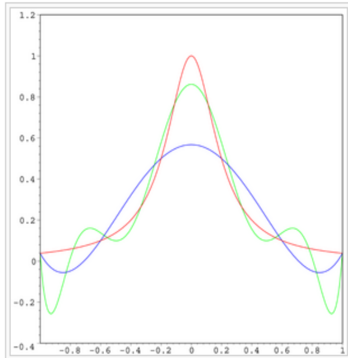
$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

Runge found that if this function is interpolated at equidistant points x_i between −1 and 1 such that:

$$x_i = -1 + (i-1)\frac{2}{n}, i \in \{1, 2, \cdots n+1\}$$

with a polynomial $P_n(x)$ which has a degree $\leq n$, the resulting interpolation oscillates toward the end of the interval, i.e. close to −1 and 1. It can even be proven that the interpolation error tends toward infinity when the degree of the polynomial increases:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\max_{-1\leq x\leq 1}|f(x) - P_n(x)|\right) = \infty.$$



The red curve is the Runge function, the blue curve is a 5th-degree polynomial, while the green curve is a 9th-degree polynomial. The approximation only gets worse.