MÉTODOS ITERATIVOS DE RESOLUCIÓN DE FUNCIONES

1. Análisis de un método iterativo

Para hallar la solución α de una función no lineal $f(\alpha) = 0$ se utilizan métodos iterativos. Para analizar el comportamiento de un esquema de la forma:

$$x^{k+1} = \phi(x^k)$$

es necesario comprobar

1. Consistencia: la solución α es un punto fijo del esquema iterativo:

$$\phi(\alpha) = \alpha$$

2. Convergencia: la sucesión $\{x^k\}$ tiene como límite una raíz de la función y, además, queremos ver cómo es la velocidad de convergencia.

   Si el método es consistente, para analizar la convergencia se calcula $\phi'(\alpha)$

   - Si $\phi'(\alpha) \neq 0$, el método es convergente si $|\phi'(\alpha)| < 1$. En este caso, la convergencia es lineal, con factor asintótico de convergencia $|\phi'(\alpha)|$:

   $$|x^k - \alpha| \leq \lambda |x^{k-1} - \alpha| \qquad \lambda \approx |\phi'(\alpha)|$$

     Si $|\phi'(\alpha)| \geq 1$, no podemos asegurar la convergencia.
   - Si $\phi'(\alpha) = 0$, calculamos las derivadas sucesivas hasta encontrar la primera que no se anula:

   $$\phi'(\alpha) = \phi''(\alpha) = \ldots = \phi^{p-1)}(\alpha) = 0 \qquad \phi^{p)}(\alpha) \neq 0$$

     Entonces, el método es convergente con orden p:

   $$|x^k - \alpha| \leq \lambda |x^{k-1} - \alpha|^p$$

2. Análisis del método de Newton

El esquema iterativo del método de Newton se escribe como

$$x^{k+1} = \phi(x^k) \ \text{ con } \ \phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Vamos a utilizar el procedimiento descrito en la sección anterior para analizar el comportamiento de este método.

2.1. Raíces simples

En primer lugar, analizaremos el método de Newton para raíces simples:

$$f(\alpha) = 0, \quad f'(\alpha) \neq 0$$

1. Consistencia

$$\phi(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

   Como α es solución (es decir, $f(\alpha) = 0$), el método es consistente para raíces simples.

2. Convergencia
   Para analizar la convergencia del método, es necesario calcular la derivada de la función de iteración:
   $$\phi'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$
   Para saber el orden de convergencia, evaluamos esta derivada en la solución:
   $$\phi'(\alpha) = \frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2}$$
   Como α es solución, tenemos que si $f'(\alpha) \neq 0$ entonces $\phi'(\alpha) = 0$ y el método es de orden ≥ 2.

2.2. Raíces múltiples

Consideremos ahora el caso de raíces de multiplicidad m

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{m-1)}(\alpha) = 0\ ,\ f^{m)}(\alpha) \neq 0$$

Si α es una raíz de multiplicidad m, la función $f(x)$ puede escribirse como

$$f(x) = (x-\alpha)^m g(x) \ \text{ con } \ g(\alpha) \neq 0$$

La función de iteración en este caso es

$$\begin{aligned}\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} &= x - \frac{g(x)(x-\alpha)^m}{mg(x)(x-\alpha)^{m-1} + g'(x)(x-\alpha)^m} \\ &= x - \frac{g(x)(x-\alpha)}{mg(x) + g'(x)(x-\alpha)}\end{aligned}$$

y su derivada es

$$\begin{aligned}\phi'(x) =& 1 - \frac{\Big[g'(x)(x-\alpha) + g(x)\Big]\Big[mg(x) + g'(x)(x-\alpha)\Big]}{\Big[mg(x) + g'(x)(x-\alpha)\Big]^2} \\ &+ \frac{\Big[g(x)(x-\alpha)\Big]\Big[mg'(x) + g''(x)(x-\alpha) + g'(x)\Big]}{\Big[mg(x) + g'(x)(x-\alpha)\Big]^2}\end{aligned}$$

1. Consistencia
   $$\phi(\alpha) = \alpha - \frac{g(\alpha)(\alpha-\alpha)}{mg(\alpha) + g'(\alpha)(\alpha-\alpha)} = \alpha$$
   (el numerador se anula y el denominador es $mg(\alpha) \neq 0$). Por lo tanto, el método es consistente.

2. Convergencia Si evaluamos la derivada de la función de iteración en la solución, tenemos que
   $$\phi'(\alpha) = 1 - \frac{mg^2(\alpha)}{m^2g^2(\alpha)} = 1 - \frac{1}{m}$$
   así que el método converge linealmente con F.A.C $= 1 - \dfrac{1}{m}$.

Nota: En el caso de tener una raíz de multiplicidad m, se puede adaptar el método de Newton para no perder la convergencia cuadrática. Si conocemos la multiplicidad de la raíz, , podemos utilizar el siguiente esquema iterativo:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f^{m-1)}(x^k)}{f^{m)}(x^k)},$$

que corresponde a aplicar Newton a la derivada $m-1$ de f. Dado que α es una raíz simple de esta función, podemos esperar convergencia de orden 2.

Ejercicio:
Considera la función $f(x) = x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 40x + 25 = (x-1)^2(x+5)^2$.

- Utiliza el método de Newton para hallar un cero de la función, tomando como aproximación inicial $x^0 = 1.5$. Dibuja la gráfica de convergencia. ¿Cómo es la convergencia del método?
- Utiliza el método de Newton adaptado a raíces múltiples, con la misma aproximación inicial. Comprueba el orden de convergencia.