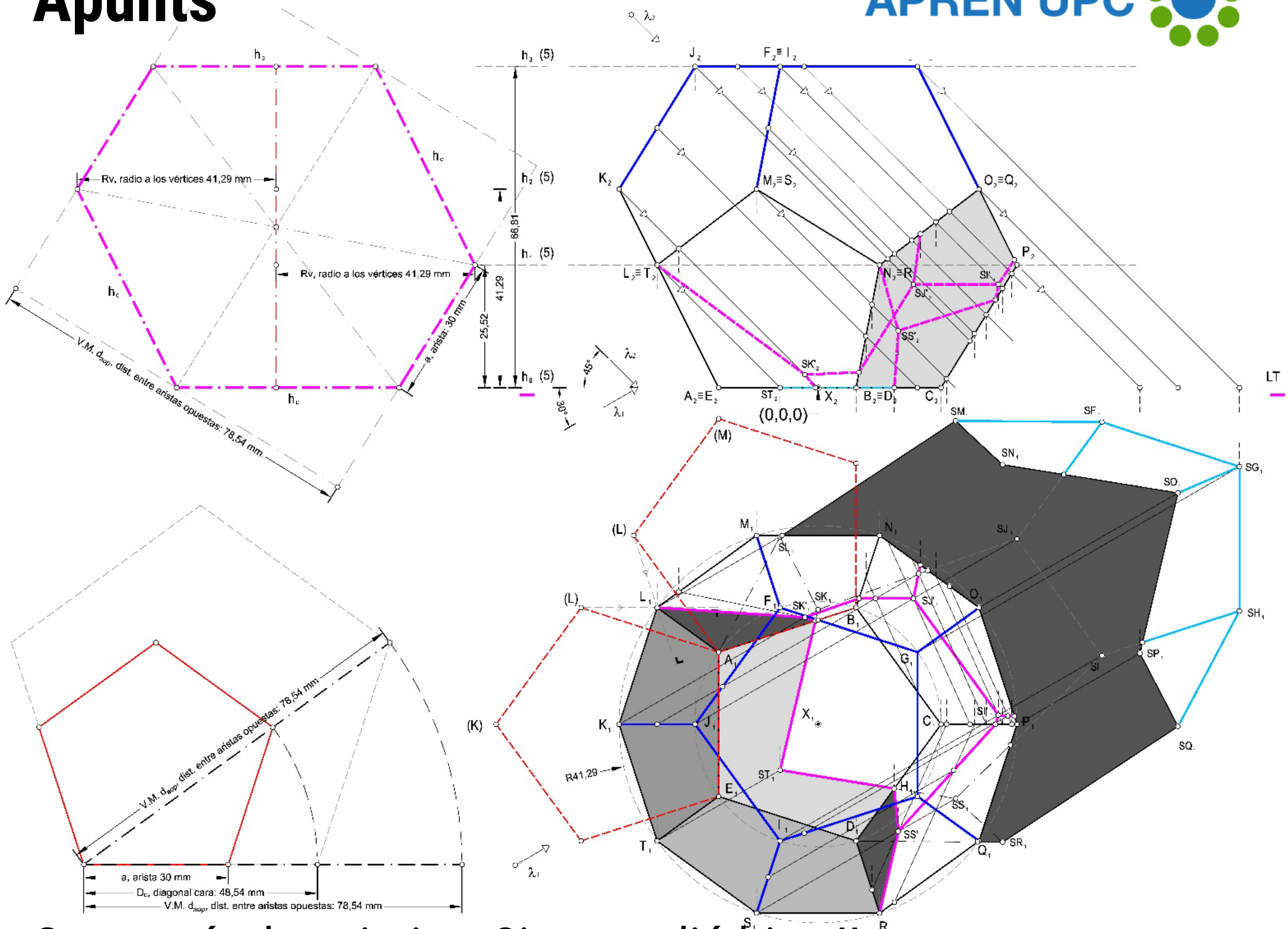
Apunts

APRÈN UPC



Geometría descriptiva. Sistema diédrico II: Poliedros – El Dodecaedro

Autoria: Prof. Mario Fernández González

Data: 2010-2025
Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Camins, Canals i Ports de Barcelona (ETSECCPB)

Titulació/ns: Grau en Enginyeria Civil

Assignatura/es: 2500018 Tècniques de Representació

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

→1

Dodecaedro regular

5.1. DEFINICIÓN Y DESCRIPCIÓN

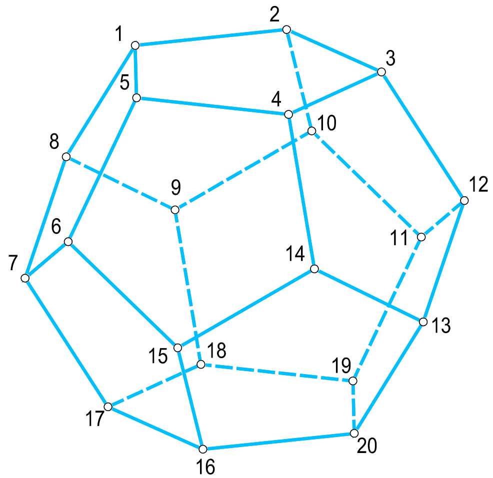


Fig. 5.1

El dodecaedro es un poliedro regular convexo que posee 12 caras, 20 vértices y 30 aristas, siendo tres las caras de cada ángulo poliedro y pentágonos regulares (Fig. 5.1).

5.2. PROPIEDADES

Citamos solo aquellas características necesarias y útiles para su construcción y representación:

- Las caras opuestas en relación con el centro de gravedad son paralelas y una respecto a la otra están giradas 180º.

- Las aristas opuestas en relación con el centro de gravedad son paralelas.

- El poliedro conjugado del dodecaedro es el icosaedro, cuyo conjugado es el dodecaedro (Figs. 5.2.1 y 5.2.2).

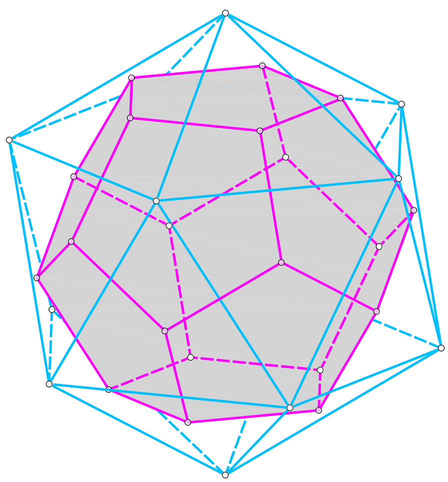


Fig. 5.2.1

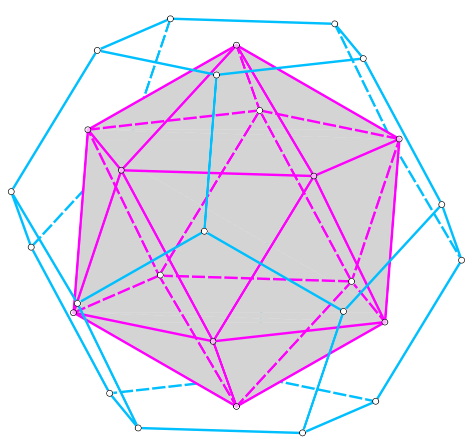


Fig. 5.2.2

5.3. SECCIÓN PRINCIPAL

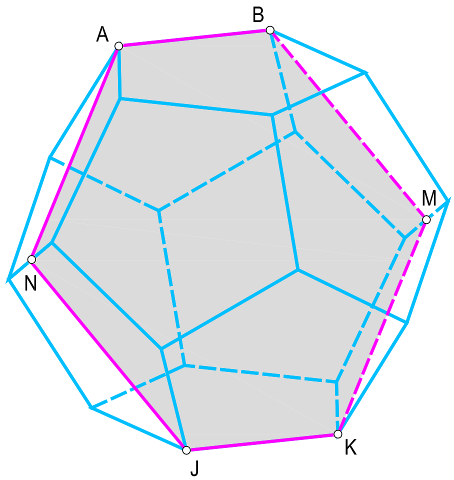


Fig. 5.3.1

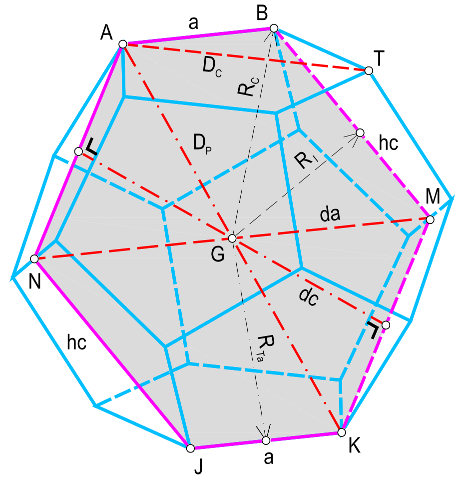


Fig. 5.3.2

La sección principal (Fig. 5.3.1) del dodecaedro regular es la que se obtiene al cortarlo por un plano que contiene dos aristas opuestas *(AB-JK)* y pasa por los puntos medios *M* y *N* de las aristas perpendiculares a las anteriores.

Hay quince secciones principales (una por cada par de aristas), que son hexágonos irregulares, con dos lados opuestos iguales a la arista *(a)* y los otro cuatro iguales a la altura de una de las caras *(h_c)*.

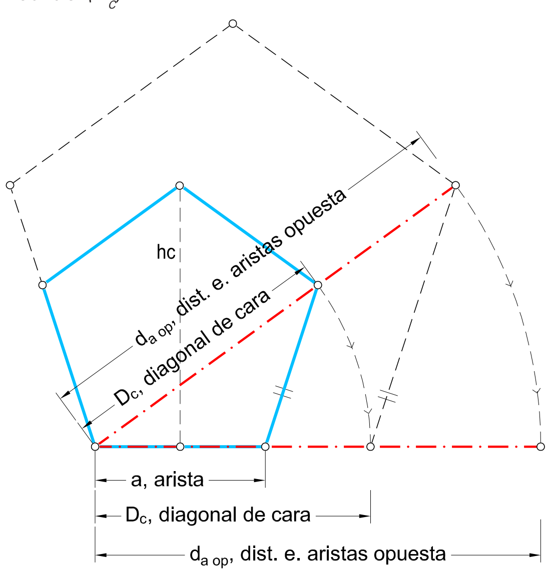


Fig. 5.3.3

La sección principal tiene la misma altura y anchura, iguales a la distancia entre dos aristas opuestas (Fig. 5.3.4).

La distancia entre dos aristas opuestas *(d_{aop})* del dodecaedro regular es igual a la diagonal de un pentágono regular que tiene de lado la diagonal de una de las caras pentagonales del dodecaedro.

A partir del pentágono regular de la cara del dodecaedro regular, se determina dicha magnitud (Fig. 5.3.3).

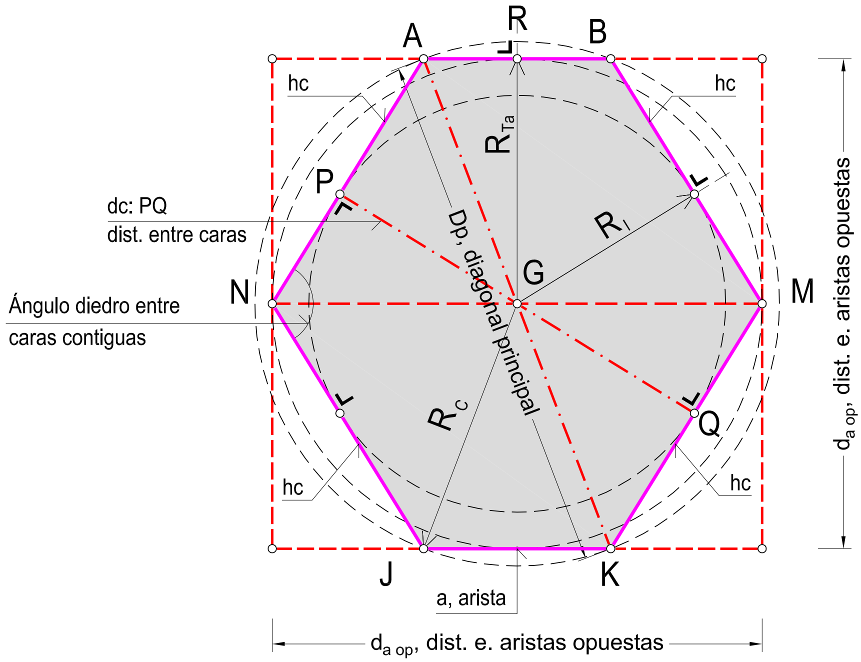


Fig. 5.3.4.

Con esta magnitud, se construye un cuadrado de lado $d_{a\ op}$ y se obtiene el hexágono irregular, que constituye la sección principal (Fig. 5.3.4).

En la sección principal (Figs. 5.3.2 y 5.3.4), aparecen las principales magnitudes del poliedro:

- a: → arista del dodecaedro *(AB)*
- h_c: → altura de una cara del dodecaedro *(AN)*
- D_c: → diagonal de una cara del dodecaedro *(AT)*
- $d_{a\ op}$: → distancia entre aristas opuestas *(AJ)*
- d_c: → distancia entre caras opuestas *(PQ)*
- D_p: → diagonal principal *(AB)*
- R_C: → radio de la esfera circunscrita *(GA)*
- R_I: → radio de la esfera inscrita *(GP)*
- R_{TA}: → radio de la esfera tangente a las aristas *(GQ)*

Las cuatro primeras magnitudes son elementos determinantes del dodecaedro que se condicionan mutuamente y solo una de ellas define el resto y, por tanto, el poliedro:

Dada la arista ***a*** del dodecaedro, construiremos a partir de ella un pentágono regular de lado la arista, a partir del cual podremos deducir geométricamente la relación dimensional existente entre los elementos determinantes.

Si partiéramos de la altura de una cara del dodecaedro $h_{c'}$ construiríamos un pentágono regular arbitrario de altura h_1 y lado a_1; mediante la proporcionalidad geométrica existente en todo pentágono entre su altura y su lado, obtendríamos el lado ***a*** del pentágono regular cuya altura sería h_c. Una vez obtenido el pentágono, ya podríamos hallar la diagonal de la cara D_c y la distancia $d_{a\ op}$.

Para obtener los elementos determinantes de un dodecaedro partiendo de la diagonal de una cara d, actuaríamos de igual forma que antes: construiríamos un pentágono regular arbitrario de diagonal d_1 y lo reduciríamos o ampliaríamos hasta obtener uno cuya diagonal fuera d, pentágono a partir del cual podríamos obtener el resto de elementos.

Finalmente, en caso de que el dato de partida fuera la distancia entre aristas opuestas $d_{a\ op}$, construiríamos un pentágono arbitrario y hallaríamos los cuatro elementos determinantes del dodecaedro que tuviera ese pentágono por cara. Sobre el segmento $d_{a\ op1'}$ mediríamos el segmento dado $d_{a\ op}$ y realizaríamos la construcción a la inversa hasta obtener todos los elementos determinantes del dodecaedro del cual nos habían dado el dato inicial $d_{a\ op}$.

5.4. OTRAS SECCIONES PLANAS

Las secciones planas particulares del dodecaedro son las producidas por planos paralelos a una cara, por planos perpendiculares a una diagonal y por planos paralelos a una sección principal.

Las secciones producidas por planos paralelos a una cara son pentágonos regulares (Fig. 5.4.1.a), o bien decágonos regulares o irregulares.

Si el plano pasa por un vértice del dodecaedro, el lado del pentágono regular es la diagonal de la cara del dodecaedro (Fig. 5.4.1.b). Si el plano pasa por el centro del dodecaedro, se obtiene un decágono regular de lado la mitad de la diagonal de la cara (Fig. 5.4.1.c). En los demás casos, las secciones planas son decágonos irregulares.

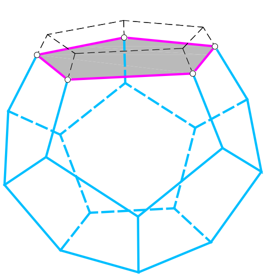


Fig. 5.4.1.a

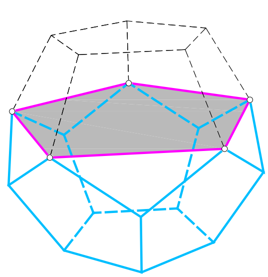


Fig. 5.4.1.b

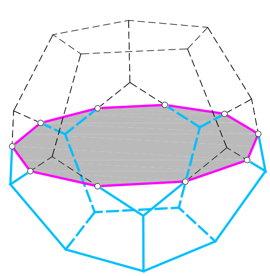


Fig. 5.4.1.c

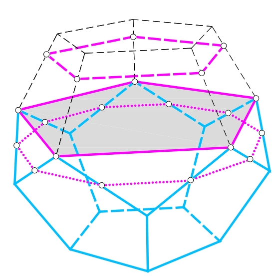


Fig. 5.4.1.d

Si el plano pasa por el punto medio de la diagonal, la sección es un hexágono regular de lado la mitad de la distancia entre las aristas opuestas, $d_{a\ op}$ (Fig. 5.4.2.e). Los hexágonos que se obtienen al seccionar por otros planos son irregulares, de lados alternos iguales (Fig. 5.4.2.c, d).

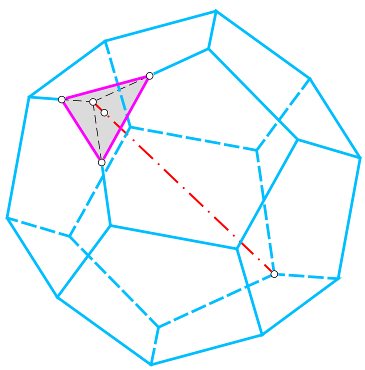


Fig. 5.4.2.a

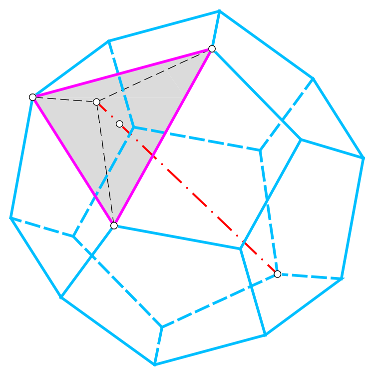


Fig. 5.4.2.b

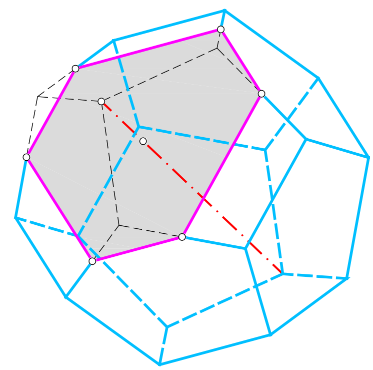


Fig. 5.4.2.c

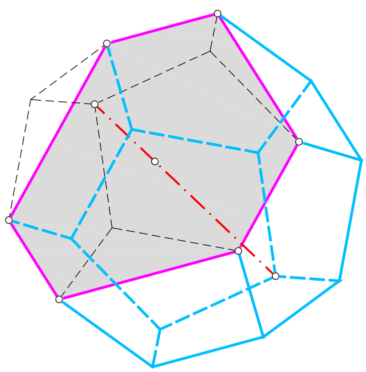


Fig. 5.4.2.d

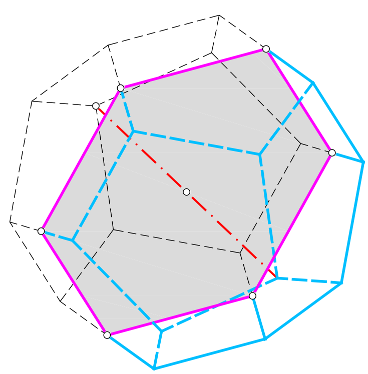


Fig. 5.4.2.e

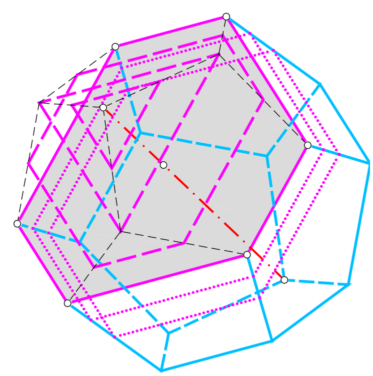


Fig. 5.4.2.f

En la Fig. 5.4.3., se muestran las secciones producidas por planos paralelos a una sección principal ABMKJN, (Fig. 5.4.3.e).

Si el plano secante contiene las diagonales de las caras paralelas al par de aristas contenidas en la sección principal, se obtienen cuadrados de lado igual a la diagonal de la cara (Fig. 5.2.3.a).

Los demás planos seccionan el dodecaedro en rectángulos, hexágonos irregulares de lados alternos iguales y octógonos irregulares de lados opuestos iguales (Fig. 5.2.3.a, d y c).

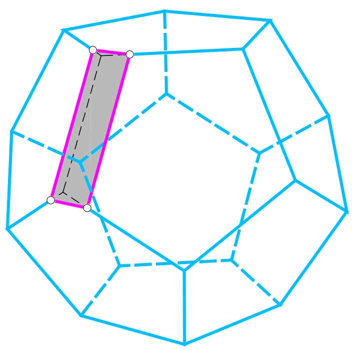


Fig. 5.4.3.a

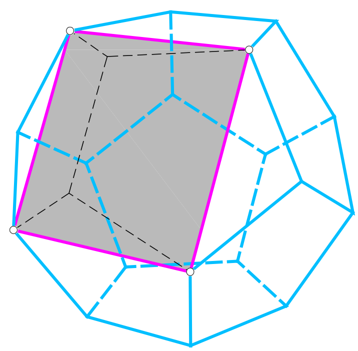


Fig. 5.4.3.b

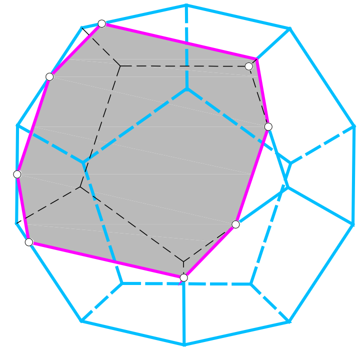


Fig. 5.4.3.c

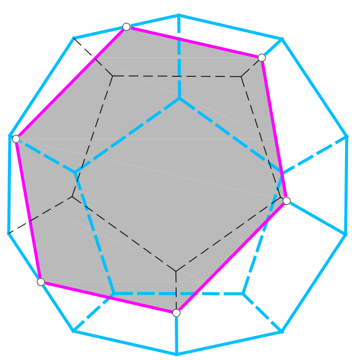


Fig. 5.4.3.d

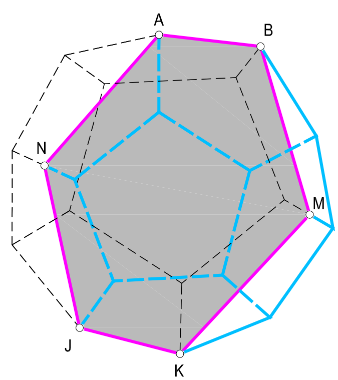


Fig. 5.4.3.e

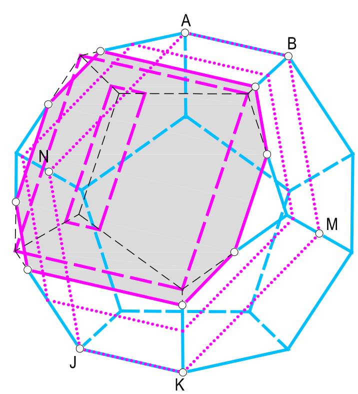


Fig. 5.4.3.f

5.5. REPRESENTACIÓN DEL DODECAEDRO REGULAR

5.5.1. CON UNA CARA SOBRE EL PLANO HORIZONTAL

Tanto la cara apoyada sobre el plano horizontal como su opuesta están en su verdadera magnitud por ser horizontales, teniendo en cuenta que la cara opuesta estará girada respecto de la apoyada 180˚ (Fig. 5.5.1.b).

El resto de los diez vértices del dodecaedro estarán situados sobre una circunferencia de radio R_v (radio a los vértices) formando un decágono regular. Dichos vértices pertenecen alternadamente a dos coronas de vértices, cuyas cotas vienen determinadas en la sección principal del poliedro (Fig. 5.5.1.a), lo cual nos permitirá obtener la proyección vertical del dodecaedro refiriendo cada vértice a su proyección horizontal.

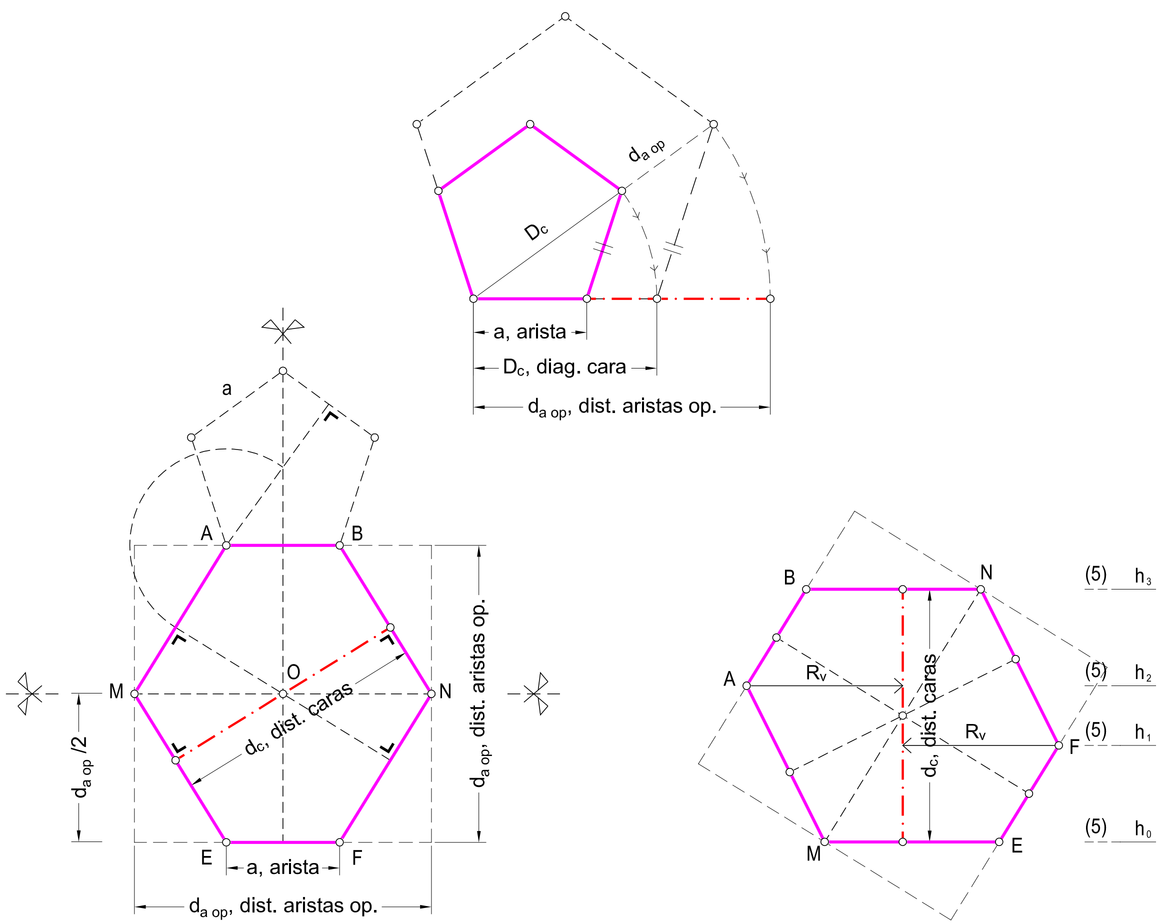


Fig. 5.5.1.a

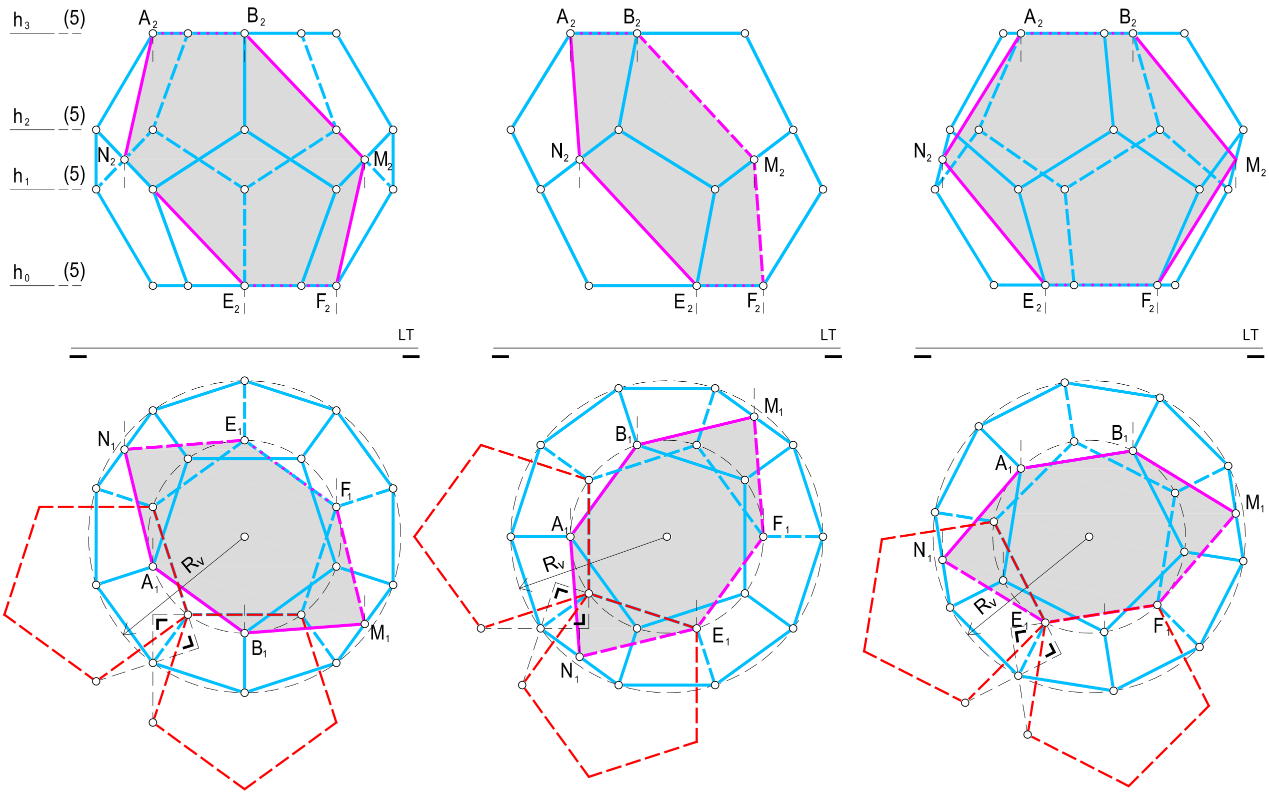


Fig. 5.5.1.b

5.5.2. CON UNA ARISTA SOBRE EL PLANO HORIZONTAL Y LA SECCIÓN PRINCIPAL PERPENDICULAR AL PLANO HORIZONTAL

Este es el caso en que el dodecaedro se representa con dos aristas opuestas en un plano horizontal. Las dos aristas consideradas definen una sección principal del dodecaedro en un plano horizontal, que es la proyección del dodecaedro sobre el plano horizontal.

Podemos observar que el poliedro, en esta posición, tiene además una sección principal en un plano vertical: la definida por las aristas AB y EF. Luego, las diferentes alturas de los vértices en proyección vertical se obtienen refiriéndolos a planos cuyas alturas están marcadas en la sección principal por las distintas coronas de puntos (Fig. 5.5.2.b).

Teniendo en cuenta las partes vistas y ocultas del poliedro, completaremos las proyecciones del dodecaedro (Fig. 5.5.2.a).

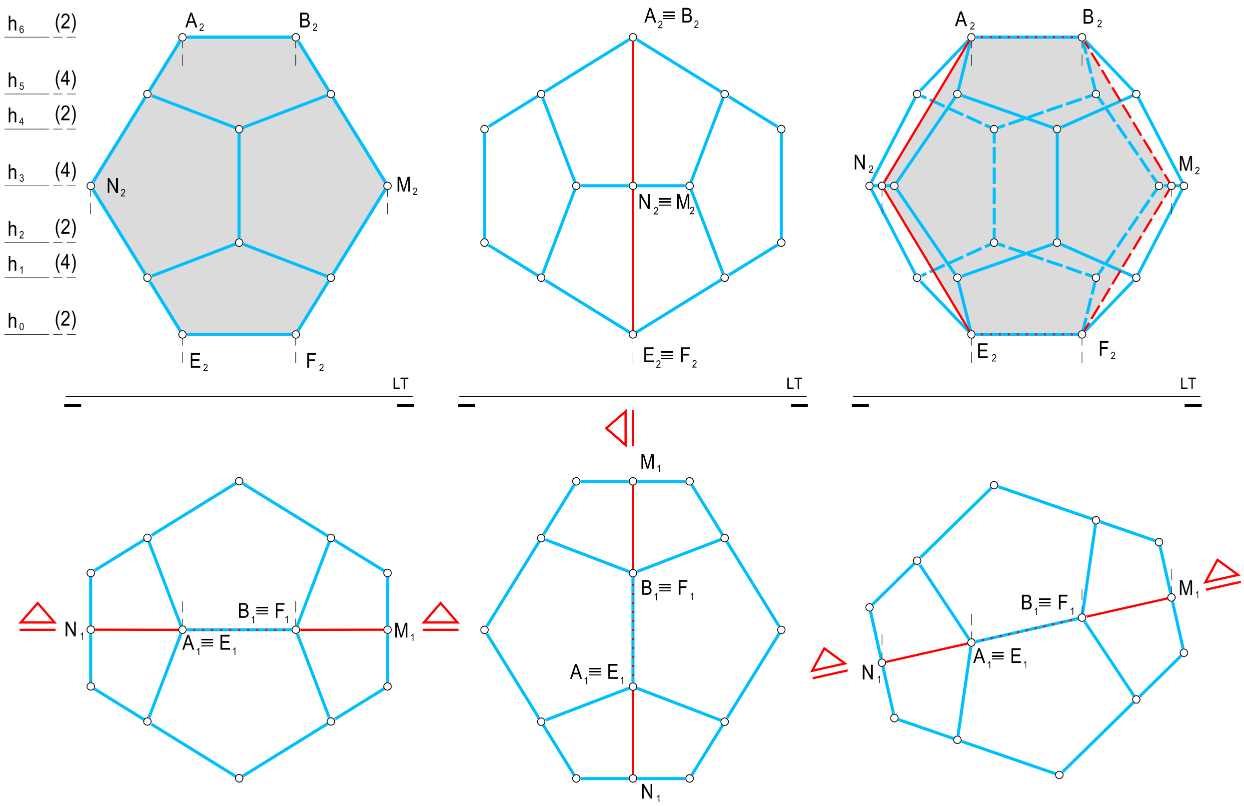


Fig. 5.5.2.a

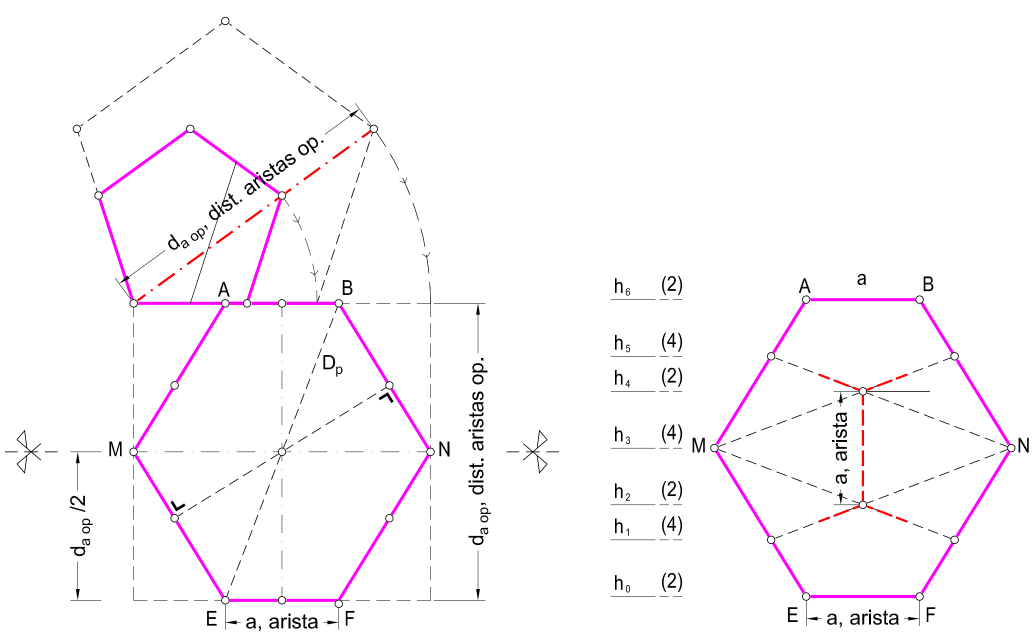


Fig. 5.5.2.b

5.5.3. CON UNA DIAGONAL PRINCIPAL VERTICAL

Considerando una sección principal con la diagonal que pasa por los puntos A y F vertical (Fig. 5.5.3.b), vemos que existen cuatro niveles sobre los cuales se ubican el resto de los vértices del dodecaedro.

Tanto la primera como la última de las coronas de puntos estarán situadas en proyección horizontal sobre un círculo horizontal de radio *t* y centro en la diagonal vertical.

El resto de los vértices del dodecaedro, correspondientes a la segunda y tercera coronas, están situados sobre un círculo de radio s y son seis por cada nivel. Las aristas de los pentágonos situados sobre estas dos coronas están en su verdadera magnitud en proyección horizontal, por ser rectas horizontales.

Las cotas de los vértices de las distintas coronas están marcadas en la sección principal (Fig. 5.5.3.a), lo cual nos permite determinar la proyección vertical.

De esta forma, uniendo ordenadamente los vértices, tendremos las proyecciones buscadas, una vez consideradas las aristas vistas y ocultas (Fig. 5.5.3.b).

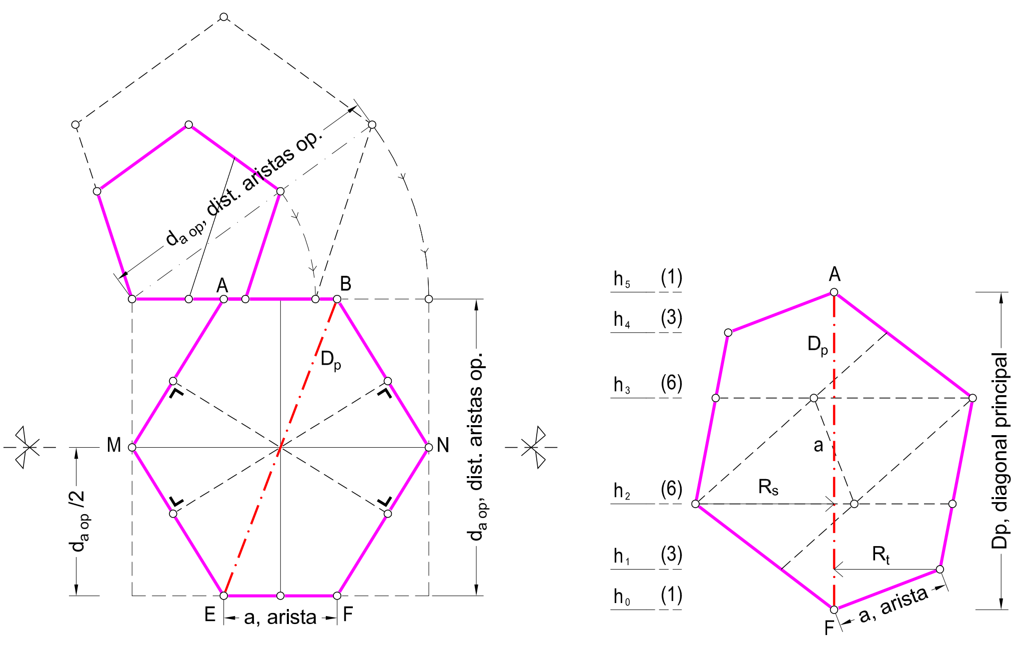


Fig. 5.5.3.a

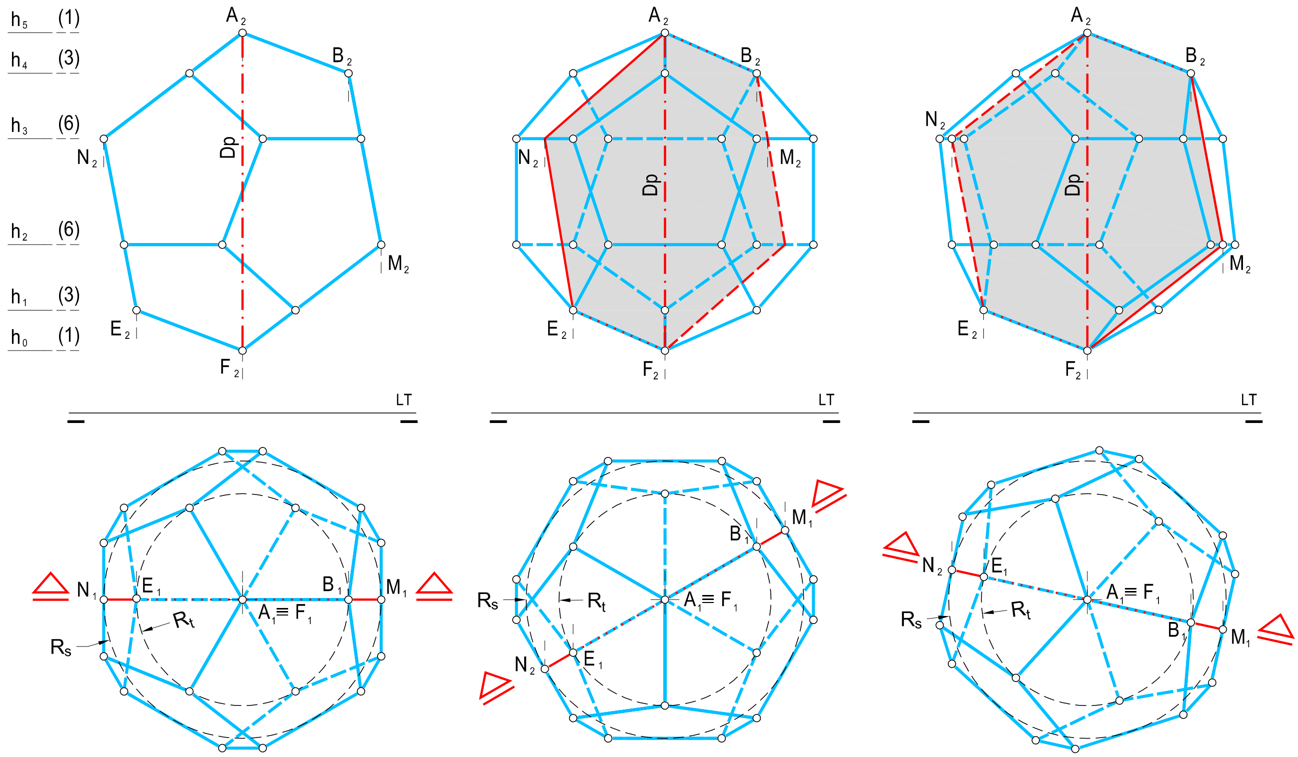


Fig. 5.5.3.b

Otra forma de construcción:

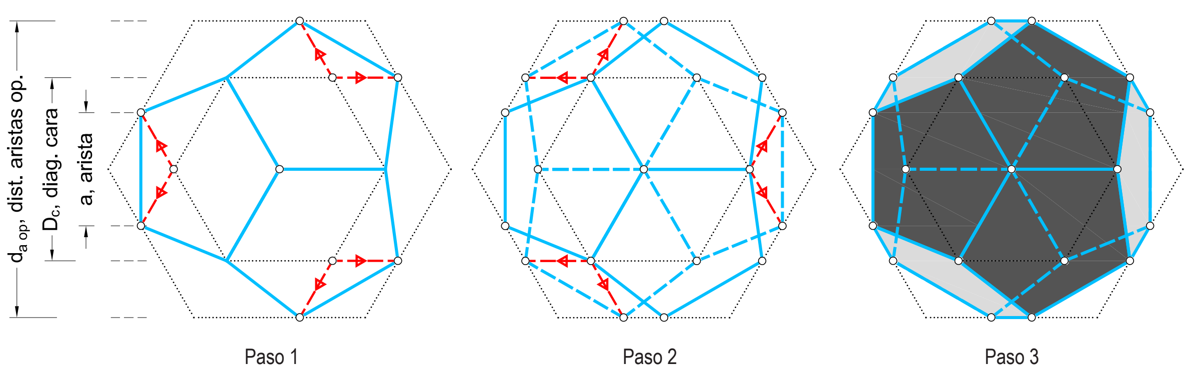


Fig. 5.5.3.c

5.6. DODECAEDRO. EJERCICIOS

1. CONSTRUCCIÓN DE UN DODECAEDRO REGULAR EN EL PRIMER DIEDRO QUE TIENE SU CARA INFERIOR EN EL PLANO HORIZONTAL

Dibuja las proyecciones de un dodecaedro regular en el primer diedro, que tiene su cara inferior en el plano horizontal definida por los puntos ABCDE representados.

Considerando opacas las seis caras de menor cota, transparentes las seis restantes y con estructura alámbrica en sus lados, se pide:

Halla las sombras propia, arrojada y autoarrojada del cuerpo sobre sí mismo y sobre el plano horizontal.

Solución:

Véase el apartado 5.5.1. para la construcción básica del dodecaedro regular con una cara sobre el plano horizontal.

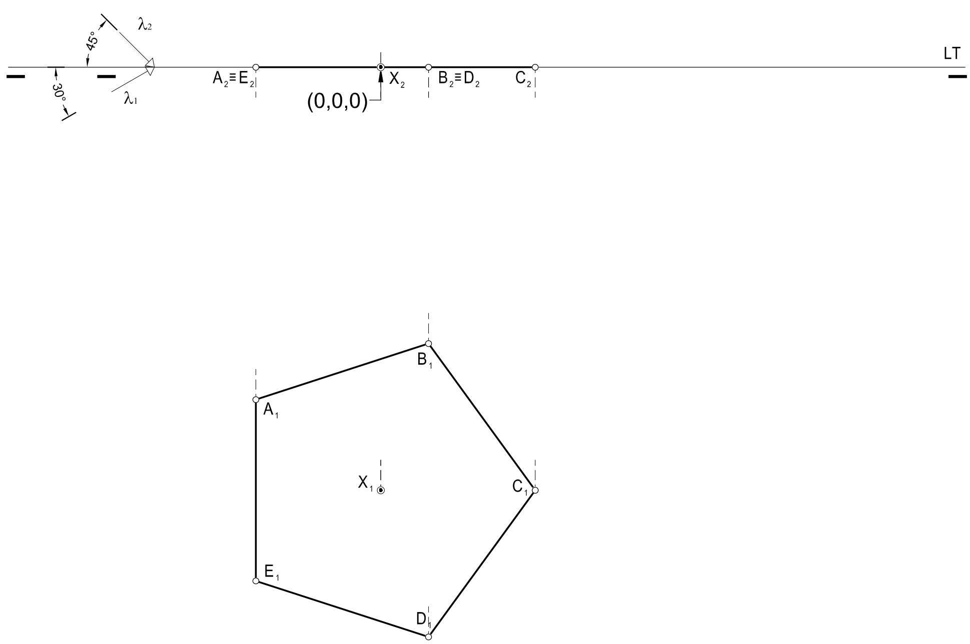


Fig. 5.6.1.a

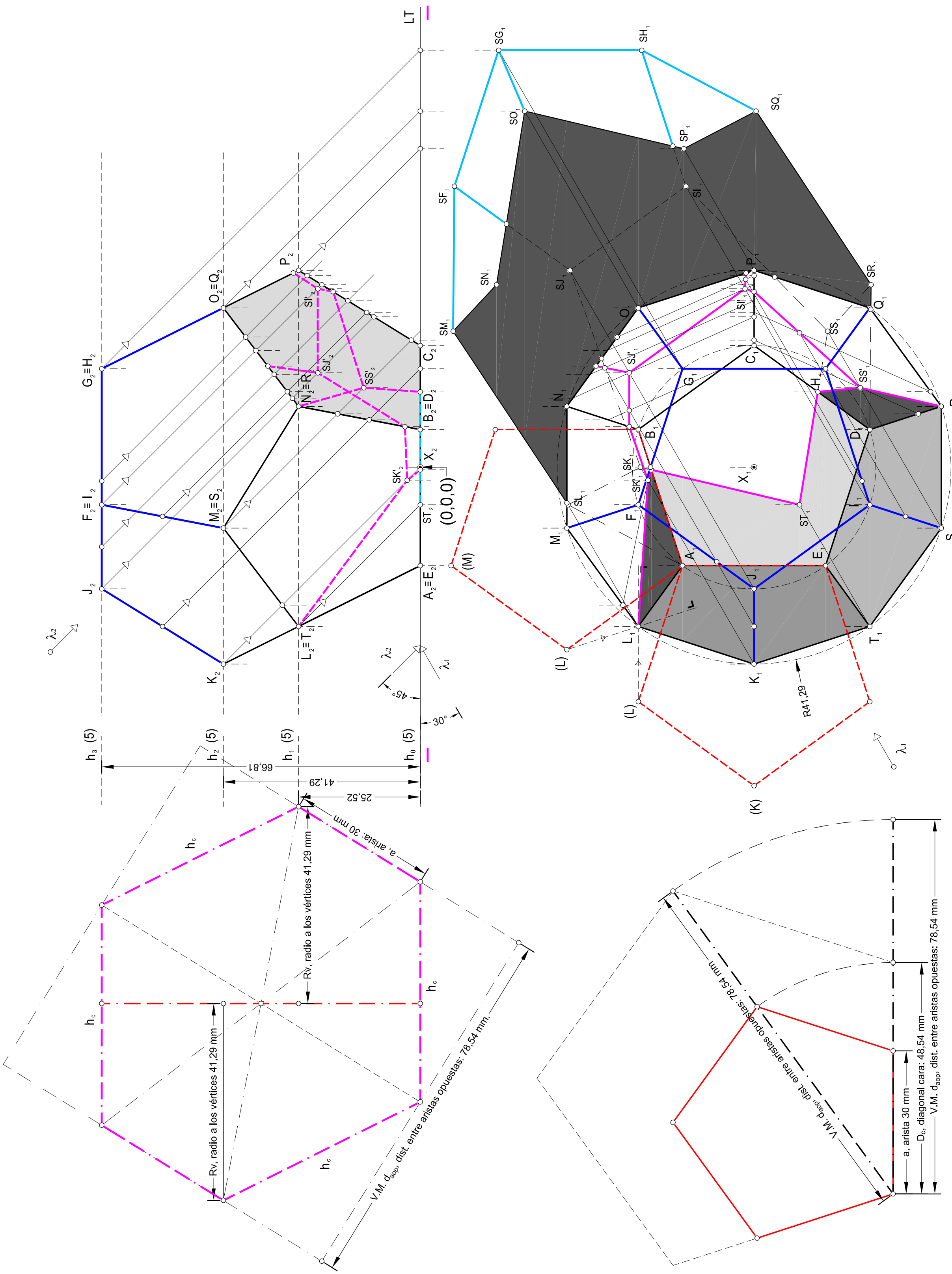
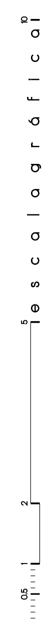

LT
G₂≡H₂
O₂≡Q₂
P₂
C₂
B₂≡D₂
X₂
(0,0,0)
A₂≡E₂
F₂≡I₂
M₂≡S₂
N₂≡R₂
J₂
K₂
L₂≡T₂
h₃ (5)
h₂ (5)
h₁ (5)
h₀ (5)
66,81
41,29
25,52
30°
45°
a, arista: 30 mm
Rv, radio a los vértices 41,29 mm
V.M. d_aop, dist. entre aristas opuestas: 78,54 mm.
R41,29
(K)
(L)
(M)
a, arista 30 mm
Dc, diagonal cara: 48,54 mm
V.M. d_aop, dist. entre aristas opuestas: 78,54 mm
V.M. d_aop, dist entre aristas opuestas: 78,54 mm

Fig. 5.6.1.b


0
0.5
1
2
5
escala gráfica