Àlgebra i Geometria (250101)

Informació general

Centre docent	ETSECCPB
Departaments	Departament d'Enginyeria Civil i Ambiental (DECA)
Crèdits	6.0 ECTS
Titulacions	GRAU EN ENGINYERIA CIVIL (pla 2017) GRAU EN ENGINYERIA CIVIL (pla 2010)
Curs	2021/22

Idioma majoritari per grup

- Grup 10 idioma pendent de denifir (Q2)
- Grup ENG Anglès (Q2)

Professorat de l'assignatura

Professorat responsable: Maria Angeles Puigvi Burniol
Professorat: Maria Angeles Puigvi Burniol

Objectius formatius

Coneixements d'àlgebra lineal, mètodes de resolució de problemes lineals propis de l'enginyeria i d'elements de geometria analítica en dos i tres dimensions. Capacitat per l'anàlisi i la resolució dels problemes matemàtics plantejats en l'enginyeria que involucrin aquests conceptes.

En finalitzar el curs l'alumne haurà adquirit la capacitat de:
1. Interpretar espais vectorials.
2. Resoldre sistemes d' equacions lineals tan manualment com mitjançant algun programa d'ordinador.
3. Interpretar geomètricament els conceptes de càlcul vectorial.
4. Manipular algebràicament vectors, matrius, operadors i tensors: operacions elementals, reduccions a formes canòniques i canvis de base.

Teoria d'operadors i les seves aplicacions geomètriques. Operadors d'espais euclidis complexes. Operadors simètrics i operadors normals reals. Coneixements de sistemes d'equacions lineals, aplicacions lineals i formes bilineals i algoritmes bàsics per la seva resolució. Coneixements d'espais euclidis. Coneixements de determinants i las seves aplicacions, en particular en el càlcul d'àrees i volums. Coneixements de geometria analítica. Coneixements d'operadors lineals: endomorfismes i teoremes espectrals, espais afins euclidis, autovalors i autovectors. Coneixements d'àlgebra tensorial: operacions elementals, canvis de base i elements de càlcul tensorial. Aplicacions dels tensors a la mecànica, tensor d'inèrcia.

Aprofundir en els mecanismes de raonament lògic. Estudiar mètodes de resolució de problemes lineals que apareixen sovint en enginyeria. Presentar elements de geometria analítica i àlgebra tensorial.

Competències

Específiques

Capacitat per a la resolució dels problemes matemàtics que puguin plantejar-se en l'enginyeria. Aptitud per aplicar els coneixements sobre: àlgebra lineal; geometria; geometria diferencial, càlcul diferencial i integral; equacions diferencials i en derivades parcials; mètodes numèrics, algorísmica numèrica, estadística i optimització.

Transversals

COMUNICACIÓ EFICAÇ ORAL I ESCRITA - Nivell 1: Planificar la comunicació oral, respondre de manera adequada les qüestions formulades i redactar textos de nivell bàsic amb correcció ortogràfica i gramatical.
ÚS SOLVENT DELS RECURSOS D'INFORMACIÓ - Nivell 1: Identificar les pròpies necessitats d'informació i utilitzar les col·leccions, els espais i els serveis disponibles per dissenyar i executar cerques simples adequades a l'àmbit temàtic.
APRENENTATGE AUTÒNOM - Nivell 1: Dur a terme les tasques encomanades en el temps previst, tot treballant amb les fonts d'informació indicades, d'acord amb les pautes marcades pel professorat.

Hores totals de dedicació de l'estudiantat

		Hores	Percentatge
Aprenentatge dirigit	Grup gran	30.0 h	45.45 %
	Grup mitjà	15.0 h	22.73 %
	Grup petit/Laboratori	15.0 h	22.73 %
	Activitats dirigides	6.0 h	9.09 %
Aprenentatge autònom		84.0 h	

Temari

Tema 1: Aplicacions lineals

Definicions i exemples. Subespais Imatge i Nucli.
Monomorfisme, epimorfisme, isomorfisme. Propietats bàsiques. Espai vectorial de les aplicacions lineals. Aplicacions definides entre espais de dimensió finita. Matriu associada. Obtenció de bases del Nucli i de la Imatge. Teorema fonamental de dimensions.
Es resolen alguns problemes d'aplicacions lineals sobre espais de dimensió no finita però fonamentalment es treballa amb les definides en espais de dimensió finita. A partir de la matriu associada i utilitzant la teoria d'espais vectorials i de resolució de sistemes lineals, s'obtenen bases del Nucli i de la Imatge.
Composició d'aplicacions lineals. Inversa d'un isomorfisme. Matriu associada a la composició. Espai Espai Dual.
Resolució de problemes de composició d'aplicacions lineals. Càlcul de la matriu associada a l'aplicació inversa d'un isomorfisme. Base de l'espai dual.

Objectius específics

Introduir els conceptes fonamentals i establir la seva vinculació amb els continguts de matemàtiques que han treballat en altres assignatures. Familiaritzar-se amb vectors diferents dels que han fet servir fins ara en aplicacions físiques. Vincular la injectivitat i exhaustivitat d'una aplicació lineal amb el seu nucli i amb la seva imatge.
Vincular els nous conceptes amb l'àlgebra bàsica que ja coneixen: espais vectorials, propietats de les matrius, resolució de sistemes, rang d'un sistema de vectors i equacions implícites d'un subespai.
Justificar que les aplicacions lineals inversibles són les bijectives. Vincular la composició d'aplicacions lineals amb el producte der matrius. Introduir el concepte d'espai dual. Obtenció de bases i estudi de les seves propietats.
Relacionar els continguts d'aquest tema amb les propietats que ja coneixen de les matrius. Treballar exemples d'espai dual i obtenir bases. Insistir en aplicacions geomètriques.

Tema 1: Aplicacions lineals

Definicions i exemples. Subespais Imatge i Nucli.
Monomorfisme, epimorfisme, isomorfisme. Propietats bàsiques. Espai vectorial de les aplicacions lineals. Aplicacions definides entre espais de dimensió finita. Matriu associada. Obtenció de bases del Nucli i de la Imatge. Teorema fonamental de dimensions.
Es resolen alguns problemes d'aplicacions lineals sobre espais de dimensió no finita però fonamentalment es treballa amb les definides en espais de dimensió finita. A partir de la matriu associada i utilitzant la teoria

d'espais vectorials i de resolució de sistemes lineals, s'obtenen bases del Nucli i de la Imatge.
Composició d'aplicacions lineals. Inversa d'un isomorfisme. Matriu associada a la composició. Espai Espai Dual.
Resolució de problemes de composició d'aplicacions lineals. Càlcul de la matriu associada a l'aplicació inversa d'un isomorfisme. Base de l'espai dual.

Objectius específics

Introduir els conceptes fonamentals i establir la seva vinculació amb els continguts de matemàtiques que han treballat en altres assignatures. Familiaritzar-se amb vectors diferents dels que han fet servir fins ara en aplicacions físiques. Vincular la injectivitat i exhaustivitat d'una aplicació lineal amb el seu nucli i amb la seva imatge.
Vincular els nous conceptes amb l'àlgebra bàsica que ja coneixen: espais vectorials, propietats de les matrius, resolució de sistemes, rang d'un sistema de vectors i equacions implícites d'un subespai.
Justificar que les aplicacions lineals inversibles són les bijectives. Vincular la composició d'aplicacions lineals amb el producte der matrius. Introduir el concepte d'espai dual. Obtenció de bases i estudi de les seves propietats.
Relacionar els continguts d'aquest tema amb les propietats que ja coneixen de les matrius. Treballar exemples d'espai dual i obtenir bases. Insistir en aplicacions geomètriques.

Tema 2: Espai euclidià

Formes bilineals. Exemples i propietats bàsiques. Matriu associada a una forma bilineal. Canvi de base. Forma bilineal simètrica. Forma quadràtica. Formes definides. Forma canònica i forma normal d'una forma bilineal real simètrica.
Es resolen problemes de reducció d'una forma bilineal simètrica a la seva forma canònica i normal. Es determina el canvi de base.
Definició de producte escalar . Exemples. Propietats bàsiques. Norma. Subespai ortogonal. Bases ortogonals i ortonormals. Projecció ortogonal. Teorema de Pitàgores i llei del paral·lelogram.
Coeficient de Fourier. Desigualtats de Schwarz, triangular i de Bessel. Mètode d'ortogonalització de Gram-Schmidt. Interpretacions geomètriques.
Resolució de problemes de producte escalar real i complex. Propietats de la norma. Projecció ortogonal sobre un subespai. Interpretacions geomètriques.

Objectius específics

Desenvolupar les propietats de les formes bilineals, especialment de les simètriques, preparant el seu posterior aplicació a la classificació d'extrems en l'assignatura de Càlcul.
Treballar les propietats de les formes bilineals simètriques aplicant el mètode de les operacions elementals de fila que ja coneixen. Recordar les propietats i les operacions amb nombres complexos.
Presentar les definicions i propietats generals i contínuament interpretar-les en l'espai euclidià real de tres dimensions amb el qual l'estudiant està familiaritzat. Es pretén aconseguir un coneixement abstracte d'espai euclidià. Es treballen especialment les aplicacions geomètriques.
Presentar i demostrar les propietats fonamentals. Interpretació en l'espai euclidià real de tres dimensions. Justificar propietats geomètriques.
Adquirir destresa en la demostració i ús de propietats abstractes. Operar amb nombres complexos, Aplicar les propietats generals a l'espai euclidià real tridimensional.

Tema 2: Espai euclidià

Formes bilineals. Exemples i propietats bàsiques. Matriu associada a una forma bilineal. Canvi de base. Forma bilineal simètrica. Forma quadràtica. Formes definides. Forma canònica i forma normal d'una forma bilineal real simètrica.
Es resolen problemes de reducció d'una forma bilineal simètrica a la seva forma canònica i normal. Es determina el canvi de base.
Definició de producte escalar . Exemples. Propietats bàsiques. Norma. Subespai ortogonal. Bases ortogonals i ortonormals. Projecció ortogonal. Teorema de Pitàgores i llei del paral·lelogram.
Coeficient de Fourier. Desigualtats de Schwarz, triangular i de Bessel. Mètode d'ortogonalització de Gram-Schmidt. Interpretacions geomètriques.
Resolució de problemes de producte escalar real i complex. Propietats de la norma. Projecció ortogonal sobre un subespai. Interpretacions geomètriques.

Objectius específics

Desenvolupar les propietats de les formes bilineals, especialment de les simètriques, preparant el seu posterior aplicació a la classificació d'extrems en l'assignatura de Càlcul.
Treballar les propietats de les formes bilineals simètriques aplicant el mètode de les operacions elementals de fila que ja coneixen. Recordar les propietats i les operacions amb nombres complexos.
Presentar les definicions i propietats generals i contínuament interpretar-les en l'espai euclidià real de tres dimensions amb el qual l'estudiant està familiaritzat. Es pretén aconseguir un coneixement abstracte d'espai euclidià. Es treballen especialment les aplicacions geomètriques.
Presentar i demostrar les propietats fonamentals. Interpretació en l'espai euclidià real de tres dimensions. Justificar propietats geomètriques.
Adquirir destresa en la demostració i ús de propietats abstractes. Operar amb nombres complexos, Aplicar les propietats generals a l'espai euclidià real tridimensional.

Tema 3: Determinants

Definició de determinant. Propietats fonamentals. Determinant d'una matriu triangular. Determinant d'una matriu diagonal per blocs. Càlcul de determinants. Mètode de Gauss.
Exemples de determinants calculats reduïnt la matriu a la forma triangular.
Expressió de la funció determinant. Desenvolupament per una fila i per una columna. Determinant del producte de matrius. Determinants i inversió de matrius. Regla de Cramer.
Exercicis per determinar si una matriu és inversible, i en cas afirmatiu obtenir la seva inversa. Resolució de sistemes d'equacions lineals utilitzant la Regla de Cramer.
Aplicacions geomètriques: matriu de canvi de base entre bases ortonormals. Volum d'un paral·lelogram. Producte vectorial. Producte mixt. Propietats.

Objectius específics

A partir de la seva definició es demostren algunes propietats bàsiques, tot això sense necessitat d'explicitar el desenvolupament del determinant. Es calcula el determinant d'una matriu numèrica aplicant operacions elementals de fila fins reduir-la a la forma triangular
Practicar adequadament les operacions elementals de fila i prendre consciència de la possible programació numèrica del mètode.
Després d'introduir les propietats bàsiques de les permutacions s'explicita el determinant i el seu desenvolupament. Utilitzant les propietats de les formes multilineals alternades, es demostra que el determinant d'un producte de matrius és el producte de determinants. Es defineix la matriu cofactor i s'utilitza en el càlcul de la matriu inversa.
Treballar aquest segon mètode per invertir una matriu, atès que ja coneixen el de transformar-la en la seva forma esglaonada reduïda per files.
Dotar a l'estudiant de les eines que necessitareu a Càlcul per a la classificació dels extrems d'una funció, i per justificar l'existència de polinomis interpoladors.

Tema 3: Determinants

Definició de determinant. Propietats fonamentals. Determinant d'una matriu triangular. Determinant d'una matriu diagonal per blocs. Càlcul de determinants. Mètode de Gauss.
Exemples de determinants calculats reduïnt la matriu a la forma triangular.
Expressió de la funció determinant. Desenvolupament per una fila i per una columna. Determinant del producte de matrius. Determinants i inversió de matrius. Regla de Cramer.
Exercicis per determinar si una matriu és inversible, i en cas afirmatiu obtenir la seva inversa. Resolució de sistemes d'equacions lineals utilitzant la Regla de Cramer.
Aplicacions geomètriques: matriu de canvi de base entre bases ortonormals. Volum d'un paral·lelogram. Producte vectorial. Producte mixt. Propietats.

Objectius específics

A partir de la seva definició es demostren algunes propietats bàsiques, tot això sense necessitat d'explicitar el desenvolupament del determinant. Es calcula el determinant d'una matriu numèrica aplicant operacions elementals de fila fins reduir-la a la forma triangular
Practicar adequadament les operacions elementals de fila i prendre consciència de la possible programació numèrica del mètode.
Després d'introduir les propietats bàsiques de les permutacions s'explicita el determinant i el seu desenvolupament. Utilitzant les propietats de les formes multilineals alternades, es demostra que el determinant d'un producte de matrius és el producte de determinants. Es defineix la matriu cofactor i

s'utilitza en el càlcul de la matriu inversa.
Treballar aquest segon mètode per invertir una matriu, atès que ja coneixen el de transformar-la en la seva forma esglaonada reduïda per files.
Dotar a l'estudiant de les eines que necessitareu a Càlcul per a la classificació dels extrems d'una funció, i per justificar l'existència de polinomis interpoladors.

Tema 4: Reducció d'endomorfismes i matrius

Valors i vectors propis. Polinomi característic. Teorema general de diagonalització.
Teorema elemental de diagonalització. Exemples.
Problemes de diagonalització.
Teorema bàsic de triangularització. Exemples. Teorema de Cayley-Hamilton. Exemples i aplicacions.
Problemes de triangularització.
Problemes d'endomorfismes i matrius. Tercer bloc.

Tema 4: Reducció d'endomorfismes i matrius

Valors i vectors propis. Polinomi característic. Teorema general de diagonalització.
Teorema elemental de diagonalització. Exemples.
Problemes de diagonalització.
Teorema bàsic de triangularització. Exemples. Teorema de Cayley-Hamilton. Exemples i aplicacions.
Problemes de triangularització.
Problemes d'endomorfismes i matrius. Tercer bloc.

Tema 5. Operadors i teoremes espectrals.

Definicions i propietats bàsiques. Operadors adjunt i transposat. Matrius associades. Operadors normals. Propietats. Teorema espectral per a operadors normals.
Alguns tipus d'operadors normals, caracterització i propietats. Operadors hermitians, antihermitians i unitaris. Operadors normals reals. Operadors simètrics, antisimètrics i ortogonals. Teorema espectral per a operadors simètrics.
Problemes d'operadors normals i propietats de matrius normals.
Forma canònica dels operadors normals reals no simètrics. Isometries. Classificació dels operadors ortogonals en un espai tridimensional. Matrius normals.
Problemes d'operadors normals reals.

Tema 5. Operadors i teoremes espectrals.

Definicions i propietats bàsiques. Operadors adjunt i transposat. Matrius associades. Operadors normals. Propietats. Teorema espectral per a operadors normals.
Alguns tipus d'operadors normals, caracterització i propietats. Operadors hermitians, antihermitians i unitaris. Operadors normals reals. Operadors simètrics, antisimètrics i ortogonals. Teorema espectral per a operadors simètrics.
Problemes d'operadors normals i propietats de matrius normals.
Forma canònica dels operadors normals reals no simètrics. Isometries. Classificació dels operadors ortogonals en un espai tridimensional. Matrius normals.
Problemes d'operadors normals reals.

Tema 6. Àlgebra Tensorial.

Espai dual. Tensors afins: formes multilineals. Definicions i propietats bàsiques. Canvis de base. Notacions.
Producte tensorial. Estudi detallat dels tensors d'ordre un i dos.
Tensors d'ordre superior. Contracció. Tensors simètrics, antisimètrics i completament antisimètrics.
Producte exterior.
Tensors cartesians. Tensor d'inèrcia.
Problemes de tensors i les seves aplicacions físiques.

Tema 6. Àlgebra Tensorial.

Espai dual. Tensors afins: formes multilineals. Definicions i propietats bàsiques. Canvis de base. Notacions.
Producte tensorial. Estudi detallat dels tensors d'ordre un i dos.
Tensors d'ordre superior. Contracció. Tensors simètrics, antisimètrics i completament antisimètrics.
Producte exterior.

Tensors cartesians. Tensor d'inèrcia.
Problemes de tensors i les seves aplicacions físiques.

Avaluació

Avaluació

Activitats

Entrega 1 de problemes

Dedicació

2h

Entrega 2 de problemes

Dedicació

2h

Entrega 3 de problemes

Dedicació

2h

Metodologia docent

L'assignatura consta de 4 hores a la setmana de classes presencials a l'aula.

Es dediquen a classes teòriques 2,5 hores, en què el professorat exposa els conceptes i materials bàsics de la matèria, presenta exemples i realitza exercicis.

Es dedica 1,5 hores a la resolució de problemes amb una major interacció amb l'estudiantat. Es realitzen exercicis pràctics per tal de consolidar els objectius d'aprenentatge generals i específics.

S'utilitza material de suport en format de pla docent detallat mitjançant la plataforma Atenea: continguts, programació d'activitats d'avaluació i d'aprenentatge dirigit i bibliografia.

Mètode de qualificació

(*) El calendari d'avaluació i el mètode de qualificació s'aprovaran abans de l'inici de curs.

La qualificació final s'obté a partir de les qualificacions parcials següents:

E0: activitats realitzades durant les classes
E1: examen dels temes de la primera part del quadrimestre
E2: examen dels temes de la segona part del quadrimestre
E3: examen de tota l'assignatura
(s'haurà d'escollir entre presentar-se a l'examen E2 o al E3)

NF1=0.3E0+0.35E1+0.35E2

NF2=0.3E0+0.7E3

Nota Final = màxim {NF1, NF2}

Els exàmens consten d'una part amb qüestions sobre conceptes associats als objectius d'aprenentatge de l'assignatura pel que fa al coneixement o la comprensió, i d'un conjunt d'exercicis d'aplicació

Criteris de qualificació i d'admissió a la reavaluació: Els alumnes suspesos a l'avaluació ordinària que s'hagin presentat regularment a les proves d'avaluació de l'assignatura suspesa tindran opció a realitzar una prova de reavaluació en el període fixat en el calendari acadèmic. No podran presentar-se a la prova de reavaluació d'una assignatura els estudiants que ja l'hagin superat ni els estudiants qualificats com a no presentats. La qualificació màxima en el cas de presentar-se a l'examen de reavaluació serà de cinc (5,0). La no assistència d'un estudiant convocat a la prova de reavaluació, celebrada en el període fixat no podrà donar lloc a la realització d'una altra prova amb data posterior. Es realitzaran avaluacions extraordinàries per a aquells estudiants que per causa de força major acreditada no hagin pogut realitzar alguna de les proves d'avaluació continuada.

Aquestes proves hauran d'estar autoritzades pel cap d'estudis corresponent, a petició del professor responsable de l'assignatura, i es realitzaran dins del període lectiu corresponent.

Normes de realització de proves

Si no es realitza alguna de les activitats de laboratori o d'avaluació contínua en el periode programat, es considerarà com a puntuació zero.

Horari d'atenció

Mariàngels Puigví: concertar hora
Napoleon Anento: concertar hora

Bibliografia

Bàsica

- Rojo, J. Álgebra lineal. 2a ed. Madrid: McGraw-Hill, 2007. ISBN 9788448156350.
- Hoffman, K.; Kunze, R. Álgebra lineal. México D.F. [etc.]: Prentice Hall Hispanoamericana, 1973. ISBN 9688800090.
- Proskuriakov, I. Problemas de algebra Lineal. Moscow: Mir, 1986.
- Rojo, J.; Martín, I. Ejercicios y problemas de álgebra lineal. 2a ed. Madrid: McGraw-Hill, 2005. ISBN 8448198581.