

Àlgebra Lineal (2500001)

Informació general

Centre docent	ETSECCPB
Departaments	Departament d'Enginyeria Civil i Ambiental (DECA)
Crèdits	6.0 ECTS
Titulacions	GRAU EN ENGINYERIA CIVIL (pla 2020) PARS: ENGINYER/A DE CAMINS, CANALS I PORTS (pla 2022)
Curs	2024/25

Idioma majoritari per grup

- Grup 10 Català (Q1)
- Grup 20 Castellà (Q1)
- Grup 30 Anglès (Q1)

Professorat de l'assignatura

Professorat responsable: Napoleon Anento Moreno
Professorat: Napoleon Anento Moreno, M. Rosa Estela Carbonell, Francisco Javier Marcote Ordax, Francisco Javier Ozon Gorriz

Objectius formatius

Coneixements sobre espais vectorials; matrius; determinants; sistemes d'equacions lineals; aplicacions lineals; espais euclidians; reducció d'endomorfismes i matrius; i operadors simètrics i ortogonals.

- 1 Capacitat per interpretar espais vectorials.
- 2 Capacitat per resoldre sistemes d'equacions lineals tant manualment com per mitjà d'algun programa d'ordinador bàsic.
- 3 Capacitat per interpretar geomètricament els conceptes de càlcul vectorial.

Coneixements d'àlgebra lineal, mètodes de resolució de problemes lineals que apareixen en enginyeria, elements de geometria analítica. Capacitat per a la resolució dels problemes matemàtics plantejats en l'enginyeria que involucrin aquests conceptes. Coneixements d'espais vectorials. Coneixements de sistemes d'equacions lineals, algorismes bàsics per a la solució. Coneixements de geometria analítica. Coneixements d'operadors lineals: endomorfismes i teoremes espectrals, espais afins euclidians, autovalors i autovectors. Coneixements de determinants i les seves aplicacions, en especial en el càlcul d'àrees i volums.

Competències

Específiques

Capacitat per a la resolució dels problemes matemàtics que puguin plantejar-se en l'enginyeria. Aptitud per aplicar els coneixements sobre: ??àlgebra lineal; geometria; geometria diferencial; càlcul diferencial i integral; equacions diferencials i en derivades parcials; mètodes numèrics; algorismica numèrica; estadística i optimització. (Mòdul de formació bàsica)

Hores totals de dedicació de l'estudiantat

		Hores	Percentatge
Aprenentatge dirigit	Grup gran	30.0 h	45.45 %
	Grup mitjà	30.0 h	45.45 %
	Grup petit/Laboratori	0.0 h	0.00 %
	Activitats dirigides	6.0 h	9.09 %
Aprenentatge autònom		84.0 h	

Temari

1. Espais vectorials

Definició i exemples. Subespais vectorials. Dependència i independència lineal.

Sistema de generadors. Espais de dimensió finita. Bases.

Rang d'un sistema de vectors. Intersecció i suma de subespais. Suma directa. Fòrmula de Grassmann

Resolució de problemes bàsics

Resolució de problemes de dependència i independència lineal.

Càlcul de bases. Càlcul de components.

Problemes d'intersecció i suma de subespais.

Objectius específics

Els espais vectorials constitueixen el marc general de les aplicacions a l'enginyeria i no només l'espai tridimensional.

2. Matrius i sistemes d'equacions lineals

Definicions i tipus. Suma de matrius. Producte per escalars. Producte de matrius. Operacions elementals de fila i de columna. Matrius esglaonades. Matrius regulars: càlcul de la inversa pel mètode de Gauss-Jordan

Resolució de problemes bàsics

Sistemes d'equacions lineals. Sistemes equivalents. Teorema de Rouché-Fröbenius. Mètode de resolució de Gauss-Jordan.

Resolució de sistemes d'equacions lineals. Aplicacions

Objectius específics

Les matrius són les eines fonamentals amb les que treballarem i que després utilitzaran en les aplicacions a l'enginyeria.

Cal conèixer en detall les seves propietats bàsiques.

A partir de les propietats de les matrius i especialment utilitzant les operacions elementals de fila es planteja la resolució dels sistemes de equacions lineals. S'introdueixen algorismes numèrics de resolució.

3. Determinants

Definició de determinant. Propietats fonamentals. Determinant d'una matriu triangular. Determinant d'una matriu diagonal per blocs. Càlcul de determinants. Mètode de Gauss.

Expressió de la funció determinant. Desenvolupament per una fila i per una columna. Determinant del producte de matrius. Determinants i inversió de matrius. Regla de Cramer. Aplicacions geomètriques. Volum d'un paral·lelogram. Producte vectorial. Producte mixt. Propietats.

Exemples de determinants calculats reduïnt la matriu a la forma triangular.

Exercicis per determinar si una matriu és invertible, i en cas afirmatiu obtenir la seva inversa. Resolució de sistemes d'equacions lineals utilitzant la Regla de Cramer.

Objectius específics

A partir de la seva definició s'obtenen algunes propietats bàsiques, tot això sense necessitat d'explicitar el desenvolupament del determinant. Es calcula el determinant d'una matriu numèrica aplicant operacions elementals de fila fins reduir-la a la forma triangular

Després d'introduir les propietats bàsiques de les permutacions s'explicita el determinant i el seu desenvolupament. Utilitzant les propietats de les formes multilineals alternades, es verifica que el determinant d'un producte de matrius és el producte de determinants. Es defineix la matriu cofactor i s'utilitza en el càlcul de la matriu inversa.

Practicar adequadament les operacions elementals de fila i prendre consciència de la possible programació numèrica del mètode

Treballar aquest segon mètode per invertir una matriu, atès que ja coneixen el de transformar-la en la seva forma esglaonada reduïda per files.

4. Aplicacions lineals

Definicions i exemples. Subespais Imatge i Nucli.

Monomorfisme, epimorfisme, isomorfisme. Propietats bàsiques. Espai vectorial de les aplicacions lineals.

Aplicacions definides entre espais de dimensió finita. Matriu associada. Obtenció de bases del Nucli i de la Imatge. Teorema fonamental de dimensions.

Composició d'aplicacions lineals. Inversa d'un isomorfisme. Matriu associada a la composició. Matriu associada al canvi de base en un espai vectorial.

Es resolen alguns problemes d'aplicacions lineals sobre espais de dimensió no finita però fonamentalment es treballa amb les definides en espais de dimensió finita. A partir de la matriu associada i utilitzant la teoria d'espais vectorials i de resolució de sistemes lineals, s'obtenen bases del Nucli i de la Imatge.

Resolució de problemes de composició d'aplicacions lineals. Càlcul de la matriu associada a l'aplicació inversa d'un isomorfisme.

Objectius específics

Introduir els conceptes fonamentals i establir la seva vinculació amb els continguts de matemàtiques que han treballat en altres assignatures. Familiaritzar-se amb vectors diferents dels que han fet servir fins ara en aplicacions físiques. Vincular la injectivitat i exhaustivitat d'una aplicació lineal amb el seu nucli i amb la seva imatge.

Justificar que les aplicacions lineals invertibles són les bijectives. Vincular la composició d'aplicacions lineals amb el producte de matrius.. Obtenció de bases i estudi de les seves propietats.

Vincular els nous conceptes amb l'àlgebra bàsica que ja coneixen: espais vectorials, propietats de les matrius, resolució de sistemes, rang d'un sistema de vectors i equacions implícites d'un subespai.

Relacionar els continguts d'aquest tema amb les propietats que ja coneixen de les matrius. . Insistir en aplicacions geomètriques.

5. Espai euclidià

Formes bilineals. Exemples i propietats bàsiques. Matriu associada a una forma bilineal. Canvi de base.

Forma bilineal simètrica. Forma quadràtica. Formes definides. Forma canònica i forma normal d'una forma bilineal real simètrica.

Es resolen problemes de reducció d'una forma bilineal simètrica a la seva forma canònica i normal. Es determina el canvi de base.

Definició de producte escalar . Exemples. Propietats bàsiques. Norma. Subespai ortogonal. Bases ortogonals i ortonormals. Projectió ortogonal. Teorema de Pitàgores i llei del paral·lelogram.

Coefficient de Fourier. Desigualtats de Schwarz, triangular i de Bessel. Mètode d'ortogonalització de Gram-Schmidt. Interpretacions geomètriques.

Resolució de problemes de producte escalar. Propietats de la norma. Projectió ortogonal sobre un subespai. Interpretacions geomètriques.

Objectius específics

Desenvolupar les propietats de les formes bilineals, especialment de les simètriques, preparant la seva posterior aplicació a la classificació d'extremes en l'assignatura de Càlcul.

Treballar les propietats de les formes bilineals simètriques aplicant el mètode de les operacions elementals de fila que ja coneixen.

Presentar les definicions i propietats generals i contínuament interpretar-les en l'espai euclidià real de tres dimensions amb el qual l'estudiant està familiaritzat. Es pretén aconseguir un coneixement abstracte d'espai euclidià. Es treballen especialment les aplicacions geomètriques.

Adquirir destresa en l'ús de propietats abstractes. Aplicar les propietats generals a l'espai euclidià real tridimensional.

6. Reducció d'endomorfismes i matrius

Valors i vectors propis. Polinomi característic. Teorema general de diagonalització.

Problemes de diagonalització.

Teorema elemental de diagonalització. Exemples. Teorema bàsic de triangularització. Exemples. Teorema de Cayley-Hamilton. Exemples i aplicacions.

Problemes de triangularització.

Objectius específics

Poder diagonalitzar una matriu facilita l'obtenció de les seves propietats bàsiques i la seva manipulació.

Això serà fonamental

en les aplicacions.

7. Operadors i teoremes espectrals

Definicions i propietats bàsiques. Operador transposat. Matrius associades. Operadors normals.

Propietats. Teorema espectral.

Problemes d'operadors normals i propietats de matrius normals.

Operadors normals reals. Operadors simètrics i ortogonals. Teorema espectral per a operadors simètrics.

Interpretacions geomètriques.

Problemes d'operadors normals reals.

Objectius específics

La major part de matrius que apareixen a l'enginyeria són matrius simètriques. Cal tenir clar que aquestes diagonalitzen ortogonalment. També són fonamentals les aplicacions geomètriques de les matrius ortogonals.

Activitats

Taller sobre espais vectorials

Es una activitat opcional dedicada a reforçar els continguts del tema 1 d'espais vectorials.

Dedicació

1h

Taller sobre matrius i sistemes d'equacions

Es una activitat opcional dedicada a reforçar els continguts del tema 2 de matrius i sistemes d'equacions lineals.

Dedicació

1h

Taller sobre Aplicacions Lineals

Es una activitat opcional dedicada a reforçar els continguts del tema 4 sobre aplicacions lineals.

Dedicació

1h

Taller sobre Espai Euclidià

Es una activitat opcional dedicada a reforçar els continguts del tema 5 d'espais Euclidians.

Dedicació

1h

Taller sobre Endomorfismes

Es una activitat opcional dedicada a reforçar els continguts del tema 6 sobre reducció d'endomorfismes.

Dedicació

1h

Taller sobre Operadors

Es una activitat opcional dedicada a reforçar els continguts del tema 7 sobre Operadors i Teoremes Espectrals.

Dedicació

1h

Metodologia docent

L'assignatura consta de 4 hores a la setmana de classes presencials a l'aula (grup gran) i 2 hores setmanals opcionals dedicades a tallers.

Es dediquen a classes teòriques 2 hores en grup gran, en què el professorat exposa els conceptes i materials bàsics de la matèria, presenta exemples i realitza exercicis.

Es dediquen 2 hores en grup gran, a la resolució de problemes amb una major interacció amb l'estudiantat. Es realitzen exercicis pràctics per tal de consolidar els objectius d'aprenentatge generals i específics.

En les 2 hores de taller (grup mitjà), els alumnes reben suport docent per a facilitar el seguiment de l'assignatura. Aquest suport es materialitza en forma de: (1) recordatori de continguts bàsics de matemàtiques imprescindibles per assolir els nous conceptes; (2) resolució guiada de problemes addicionals i de proves de cursos anteriors.

S'utilitza material de suport en format de pla docent detallat mitjançant el campus virtual ATENEA: continguts, programació d'activitats d'avaluació i d'aprenentatge dirigit i bibliografia.

Tot i que la majoria de les sessions s'impartiran en l'idioma indicat a la guia, potser les sessions en què es compti amb el suport d'altres experts convidats puntualment es duguin a terme en un altre idioma.

Mètode de qualificació

() El calendari d'avaluació i el mètode de qualificació s'aprovaran abans de l'inici de curs.*

La qualificació final s'obté a partir de les qualificacions parcials següents:

E0: activitats realitzades en horari de classe

E1: examen dels temes de la primera part del quadrimestre

E2: examen dels temes de la segona part del quadrimestre

E3: examen de tota l'assignatura

(s'haurà d'escollir entre presentar-se a l'examen E2 o al E3)

$NF1=0.3E0 + 0.35E1+0.35E2$

$$NF2=0.3E0 + 0.7E3$$

Nota Final = màxim {NF1, NF2}

Els exàmens consten d'una part amb qüestions sobre conceptes associats als objectius d'aprenentatge de l'assignatura pel que fa al coneixement o la comprensió, i d'un conjunt d'exercicis d'aplicació.

Respecte de la qualificació E0, si hi ha la possibilitat material, alguna de les activitats es farà en el marc del projecte Engimath@UPC+.

Criteris de qualificació i d'admissió a la reavaluació: Els alumnes suspesos a l'avaluació ordinària que s'hagin presentat regularment a les proves d'avaluació de l'assignatura suspesa tindran opció a realitzar una prova de reavaluació en el període fixat en el calendari acadèmic. No podran presentar-se a la prova de reavaluació d'una assignatura els estudiants que ja l'hagin superat ni els estudiants qualificats com a no presentats. La qualificació màxima en el cas de presentar-se a l'examen de reavaluació serà de cinc (5,0). La no assistència d'un estudiant convocat a la prova de reavaluació, celebrada en el període fixat no podrà donar lloc a la realització d'una altra prova amb data posterior. Es realitzaran avaluacions extraordinàries per a aquells estudiants que per causa de força major acreditada no hagin pogut realitzar alguna de les proves d'avaluació continuada.

Aquestes proves hauran d'estar autoritzades pel cap d'estudis corresponent, a petició del professor responsable de l'assignatura, i es realitzaran dins del període lectiu corresponent.

Normes de realització de proves

Si no es realitza alguna de les activitats de laboratori o d'avaluació contínua en el període programat, es considerarà com a puntuació zero.

Horari d'atenció

Napoleon Anento: concertar hora

Xavier Marcote: concertar hora

Javier Ozón: concertar hora

Bibliografia

Bàsica

- Rojo, J. [Álgebra lineal](#). 2a ed. Madrid: McGrawHill, 2007. ISBN 9788448156350.
- Rojo, J.; Martín, I. [Ejercicios y problemas de álgebra lineal](#). 2a ed. Madrid: McGraw-Hill, 2004. ISBN 8448198581.
- Strang, G. [Introduction to linear algebra](#). 6th ed. Wellesley, Mass.: Wellesley-Cambridge Press, 2023. ISBN 9781733146678.

Complementària

- Proskuriakov, I.V. [2000 problemas de álgebra lineal](#). Barcelona: Reverté, 1991. ISBN 9788429191264.
- Hoffman, K.; Kunze, R. [Linear algebra](#). 2nd ed. India: Pearson, 2015. ISBN 9789332550070.