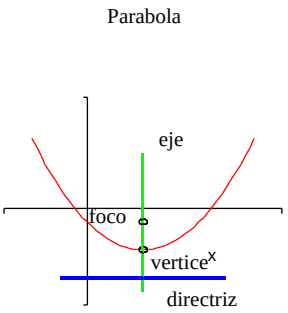
Fonaments Matemàtics

Grau en Enginyeria de la Construcció

Cónicas.

Definición 1 *Dadas una recta l y un punto F no situado en l el conjunto de puntos P equidistantes de F y de l se denomina parábola. La recta l recibe el nombre de directriz de la parábola y el punto F se llama el foco. La recta que pasa por F y es perpendicular a l se denomina eje de la parábola. El punto en el cual el eje corta a la parábola se denomina vértice.*



La ecuación de la parábola es particularmente simple si elegimos el vértice como origen y el foco se sitúa sobre uno de los ejes de coordenadas. Supongamos por el momento que el foco F se encuentra sobre el eje y. Las coordenadas de F serán entonces de la forma $(0, c)$ y, con el vértice en el origen, la ecuación de la directriz ha de ser $y = -c$. Entonces, la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en el punto $(0, c)$ toma la forma

$$x^2 = 4cy.$$

La ecuación de una parábola con vértice en el punto (x_0, y_0) y foco $(x_0, y_0 + c)$ es

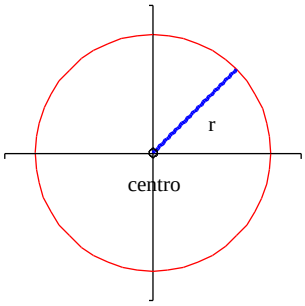
$$(x - x_0)^2 = 4c(y - y_0).$$

Definición 2 *Dado un punto $F \in \mathbb{R}^2$ y $r \in \mathbb{R}^+$, el conjunto de puntos que están a distancia r de F se denomina circunferencia. EL punto F se llama centro de la circunferencia y el valor r radio de la circunferencia.*

Si $F = (x_0, y_0)$ la ecuación de la circunferencia de radio r es

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Circunferencia

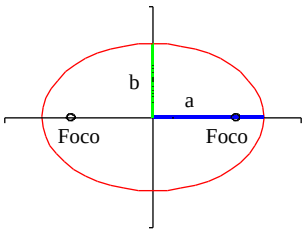


Definición 3 *Dados $c, a \in \mathbb{R}^+$ tales que $a > c$, consideramos los puntos $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$. El conjunto de puntos, P, tales que*

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a,$$

recibe el nombre de elipse. Los puntos F_1 y F_2 se denominan focos. Si llamamos $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, los valores a y b se denominan semiejes.

Elipse



La ecuación de una elipse con focos $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$ y semiejes a y b es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

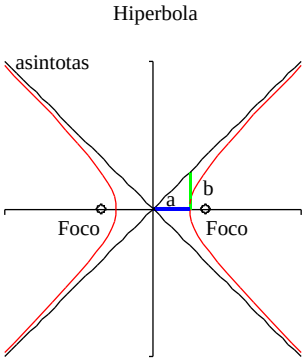
Definición 4 *Dados $c, a \in \mathbb{R}^+$ tales que $a < c$, consideramos los puntos $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$. El conjunto de puntos, P, tales que*

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a,$$

recibe el nombre de hipérbola. Los puntos F_1 y F_2 se denominan focos. Si llamamos $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, los valores a y b se denominan semiejes. Finalmente, las rectas $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ y $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ se denominan asíntotas de la hipérbola.

La ecuación de una hipérbola con focos $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$ y semiejes a y b es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

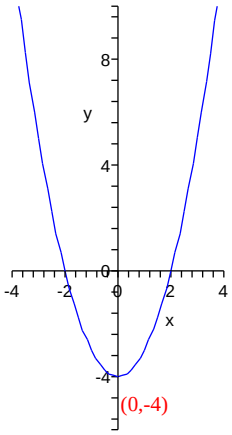


1 Problemas resueltos

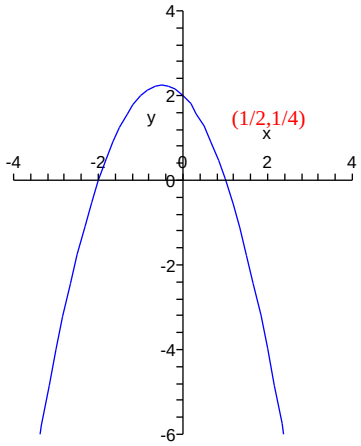
Problema 1 *Hallar el vértice, el foco y los ceros de las siguientes parábolas y representarlas:*

$$(1)\ x^2-4 \qquad (2)\ -x^2-x+2 \qquad (3)\ x^2+2x+1$$
$$(4)\ -x^2-4x-4 \qquad (5)\ x^2+x+1 \qquad (6)\ -2x^2+x-1$$

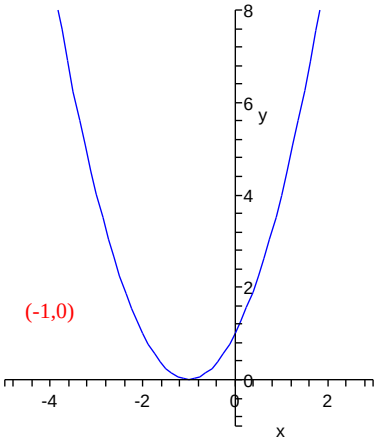
(1) Sea $y(x)=x^2-4$, entonces los ceros son $x=\pm 2$ y el vértice se obtiene de $y'(x)=2x=0 \implies x=0$. Otra forma de hallar el vértice y a su vez el foco es reduciendo la ecuación a una expresión de la forma $4c(y-y_0)=(x-x_0)^2$. En este caso, $4\frac{1}{4}(y+4)=x^2$, por tanto el vértice es el punto $(0,-4)$ y el foco $(0,-\frac{15}{4})$.



(2) Sea $y(x)=-x^2-x+2$, entonces los ceros son $x=-2,1$ y el vértice se obtiene de $y'(x)=-2x-1=0 \implies x=\frac{1}{2}$. Otra forma de hallar el vértice y a su vez el foco es reduciendo la ecuación a una expresión de la forma $4c(y-y_0)=(x-x_0)^2$. En este caso, $4(-\frac{1}{4})(y-\frac{7}{4})=(x+\frac{1}{2})^2$, por tanto el vértice es el punto $(-\frac{1}{2},\frac{7}{4})$ y el foco $(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$.

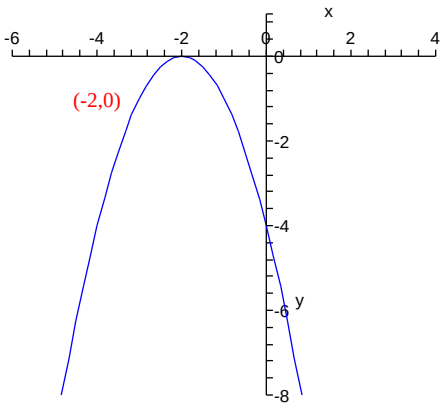


(3) Sea $y(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, entonces el cero es $x = -1$ y el vértice se obtiene de $y'(x) = 2x + 2 = 0 \Longrightarrow\ x = -1$. Otra forma de hallar el vértice y a su vez el foco es reduciendo la ecuación a una expresión de la forma $4c(y - y_0) = (x - x_0)^2$. En este caso, $4(\frac{1}{4})y = (x+1)^2$, por tanto el vértice es el punto $(-1, 0)$ y el foco $(-1, \frac{1}{4})$.

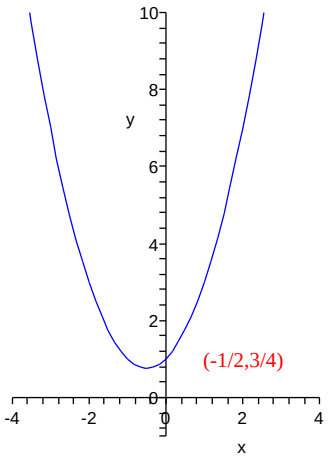


(4) Sea $y(x) = -x^2 - 4x - 4 = -(x+2)^2$, entonces el cero es $x = -2$ y el vértice se obtiene de $y'(x) = -2(x+2) = 0 \Longrightarrow\ x = -2$. Otra forma de hallar

el vértice y a su vez el foco es reduciendo la ecuación a una expresión de la forma $4c(y-y_0)=(x-x_0)^2$. En este caso, $4(-\frac{1}{4})y=(x+2)^2$, por tanto el vértice es el punto $(-2,0)$ y el foco $(-2,-\frac{1}{4})$.

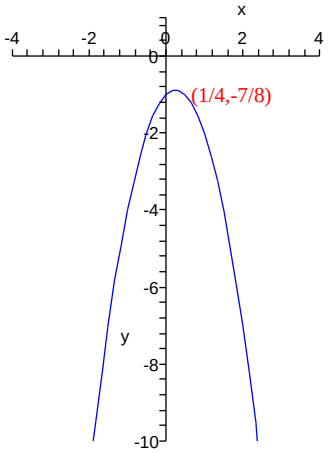


(5) Sea $y(x)=x^2+x+1$, como $b^2-4ac=-3<0$ la parábola no corta al eje de las x y el vértice se obtiene de $y'(x)=2x+1=0 \Longrightarrow\ x=-\frac{1}{2}$. Otra forma de hallar el vértice y a su vez el foco es reduciendo la ecuación a una expresión de la forma $4c(y-y_0)=(x-x_0)^2$. En este caso, $4(\frac{1}{4})(y-\frac{3}{4})=(x+\frac{1}{2})^2$, por tanto el vértice es el punto $(-\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ y el foco $(-\frac{1}{2},1)$.



(6) Sea $y(x)=-2x^2+x-1$, como $b^2-4ac=-3<0$ la parábola no corta al

eje de las x y el vértice se obtiene de $y'(x) = -4x + 1 = 0 \implies x = \frac{1}{4}$. Otra forma de hallar el vértice y a su vez el foco es reduciendo la ecuación a una expresión de la forma $4c(y - y_0) = (x - x_0)^2$. En este caso, $4(-\frac{1}{8})(y + \frac{7}{8}) = (x - \frac{1}{4})^2$, por tanto el vértice es el punto $(\frac{1}{4}, -\frac{7}{8})$ y el foco $(\frac{1}{4}, -1)$.



Problema 2 *Hallar el centro y el radio de las siguientes circunferencias y representarlas:*

(1) $x^2 + y^2 = 4$ (2) $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 9$ (3) $x^2 + y^2 + 4x + 4 = 15$

(4) $x^2 + (y - 4)^2 = 2$ (5) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 16$ (6) $4(x^2 + y^2) = 1$.

La ecuación de una circunferencia es $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Por tanto, en todos los casos trataremos de obtener este expresión.

(1) $x^2 + y^2 = 4$, representa una circunferencia de radio $r = 2$ y centro el punto $(0, 0)$.

(2) $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 9 \implies (x - 1)^2 + y^2 = 3^2$. Por tanto, se trata de una circunferencia de radio $r = 3$ y centro el punto $(1, 0)$.

(3) $x^2 + y^2 + 4x + 4 = 15 \implies (x + 2)^2 + y^2 = (\sqrt{15})^2$. Por tanto, se trata de una circunferencia de radio $r = \sqrt{15}$ y centro el punto $(-2, 0)$.

(4) $x^2 + (y - 4)^2 = 2 \implies x^2 + (y - 4)^2 = (\sqrt{2})^2$. Por tanto, se trata de una circunferencia de radio $r = \sqrt{2}$ y centro el punto $(0, 4)$.

(5) $(x-1)^2+(y+1)^2 = 16$, representa una circunferencia de radio $r = 4$ y centro el punto $(1, -1)$.

(6) $4(x^2 + y^2) = 1 \implies x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. Por tanto, se trata de una circunferencia de radio $r = \frac{1}{2}$ y centro el punto $(0, 0)$.

Problema 3 *Hallar el centro y los semiejes de las siguientes elipses y representarlas:*

(1) $x^2 + 4y^2 = 4$ (2) $x^2 - 2x + 1 + 9y^2 = 9$

(3) $x^2 + 8y^2 + 4x + 4 = 15$ (4) $4x^2 + 25(y-4)^2 = 2$

(5) $2(x+1)^2 + 3(y-1)^2 = 14$ (6) $4x^2 + 9y^2 = 1$.

La ecuación de una elipse es $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. Por tanto, en todos los casos trataremos de obtener este expresión.

(1) La ecuación reducida es $\dfrac{x^2}{2^2} + y^2 = 1$. Por tanto, se trata de una elipse de centro el $(0,0)$ y semiejes $a = 2$ y $b = 1$.

(2) La ecuación reducida es $\dfrac{(x-1)^2}{3^2} + y^2 = 1$. Por tanto, se trata de una elipse de centro el $(1,0)$ y semiejes $a = 3$ y $b = 1$.

(3) La ecuación reducida es $\dfrac{(x+2)^2}{(\sqrt{15})^2} + \dfrac{y^2}{(\sqrt{15/8})^2} = 1$. Por tanto, se trata de una elipse de centro el $(-2,0)$ y semiejes $a = \sqrt{15}$ y $b = \sqrt{15/8}$.

(4) La ecuación reducida es $\dfrac{x^2}{(1/\sqrt{2})^2} + \dfrac{(y-4)^2}{(\sqrt{2/25})^2} = 1$. Por tanto, se trata de una elipse de centro el $(0,4)$ y semiejes $a = 1/\sqrt{2}$ y $b = \sqrt{2}/5$.

(5) La ecuación reducida es $\dfrac{(x+1)^2}{(1/\sqrt{7})^2} + \dfrac{(y-1)^2}{(\sqrt{14/3})^2} = 1$. Por tanto, se trata de una elipse de centro el $(-1,1)$ y semiejes $a = 1/\sqrt{7}$ y $b = \sqrt{14/3}$.

(6) La ecuación reducida es $\dfrac{x^2}{(1/2)^2} + \dfrac{y^2}{(1/3)^2} = 1$. Por tanto, se trata de una elipse de centro el $(0,0)$ y semiejes $a = 1/2$ y $b = 1/3$.

Problema 4 *Hallar las asíntotas y los semiejes de las siguientes hipérbolas y representarlas:*

(1) $x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1$ (2) $(x-4)^2 - \dfrac{(y+5)^2}{3} = 1$

(3) $x^2 - y^2 = 1$ (4) $\dfrac{(x-1)^2}{9} - \dfrac{(y-3)^2}{16} = 1$

(5) $4x^2 - 8x - y^2 + 6y - 9 = 0$ (6) $-3x^2 + y^2 - 6x = 0$.

(1) La ecuación reducida de la hipérbola en este caso es $x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1$, por tanto las asíntotas son las rectas $x - \dfrac{y}{\sqrt{3}} = 0$ y $x + \dfrac{y}{\sqrt{3}} = 0$. Los semiejes son $a = 1$ y $b = \sqrt{3}$.

(2) La ecuación reducida de la hipérbola en este caso es $(x-4)^2 - \dfrac{(y+5)^2}{3} = 1$, por tanto las asíntotas son las rectas $(x-4) - \dfrac{(y+5)}{\sqrt{3}} = 0$ y $(x-4) + \dfrac{(y+5)}{\sqrt{3}} = 0$. Los semiejes son $a = 1$ y $b = \sqrt{3}$.

(3) La ecuación reducida de la hipérbola en este caso es $x^2 - y^2 = 1$, por tanto las asíntotas son las rectas $x - y = 0$ y $x + y = 0$. Los semiejes son $a = 1$ y $b = 1$.

(4) La ecuación reducida de la hipérbola en este caso es $\dfrac{(x-1)^2}{9} - \dfrac{(y-3)^2}{16} = 1$, por tanto las asíntotas son las rectas $\dfrac{(x-1)}{3} - \dfrac{(y-3)}{4} = 0$ y $\dfrac{(x-1)}{3} + \dfrac{(y-3)}{4} = 0$. Los semiejes son $a = 3$ y $b = 4$.

(5) La ecuación reducida de la hipérbola en este caso es $(x-1)^2 - \dfrac{(y-3)^2}{4} = 1$, por tanto las asíntotas son las rectas $(x-1) - \dfrac{(y-3)}{2} = 0$ y $(x-1) + \dfrac{(y-3)}{2} = 0$. Los semiejes son $a = 1$ y $b = 2$.

(6) La ecuación reducida de la hipérbola en este caso es $(x+1)^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1$, por tanto las asíntotas son las rectas $x + 1 - \dfrac{y}{\sqrt{3}} = 0$ y $x + 1 + \dfrac{y}{\sqrt{3}} = 0$. Los semiejes son $a = 1$ y $b = \sqrt{3}$.

Problema 5 *¿Qué tipo de curva representa cada una de las siguientes ecuaciones?*

(1) $x^2 + 4y = 0$ (2) $y^2 - 2x = 9$

(3) $x^2 + 6y^2 + 4x + 4 = 24$ (4) $x^2 + (y-4)^2 = 2$

(5) $2(x+1)^2 + 4(y-1)^2 = 16$ (6) $-3x^2 + y^2 - 6x = 0$.

(1) La curva $x^2 + 4y = 0$ representa una parábola de vértice el punto $(0, 0)$ y foco el punto $(0, -1)$.

(2) La curva $y^2 - 2x = 9$ representa una parábola de vértice el punto $(-9/2, 0)$ y foco el punto $(-4, 0)$.

(3) La curva $x^2 + 6y^2 + 4x + 4 = 24$ representa una elipse de ecuación reducida

$$\frac{(x+2)^2}{\sqrt{24}} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

(4) La curva $x^2 + (y-4)^2 = 2$ representa una circunferencia de centro $(0, 4)$ y radio $\sqrt{2}$.

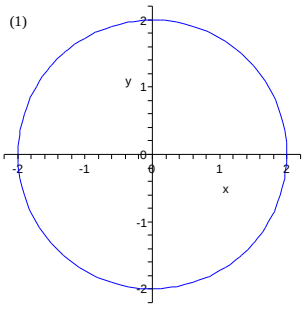
(5) La curva $2(x+1)^2 + 4(y-1)^2 = 16$ representa una elipse de ecuación reducida

$$\frac{(x+1)^2}{2\sqrt{2}} + \frac{(y-1)^2}{2} = 1.$$

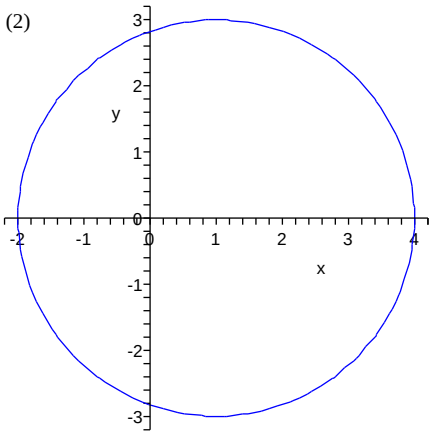
(6) La curva $-3x^2 + y^2 - 6x = 0$ representa una hipérbola de ecuación reducida

$$(x+1)^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

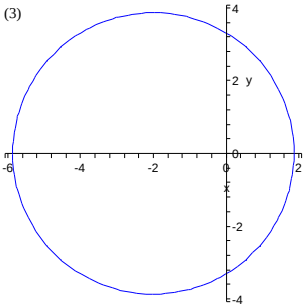
(1)


2
1
y
0
-2
-1
0
1
2
x
-1
-2

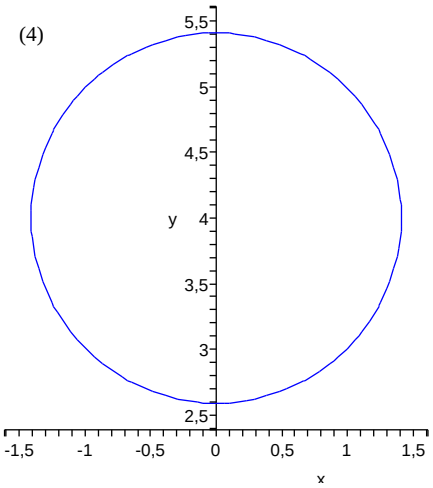
(2)


3
2
y
1
0
-2
-1
0
1
2
3
4
x
-1
-2
-3

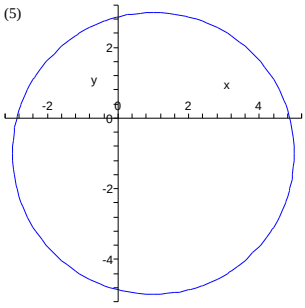
(3)


4
2
y
-6
-4
-2
0
2
x
-2
-4

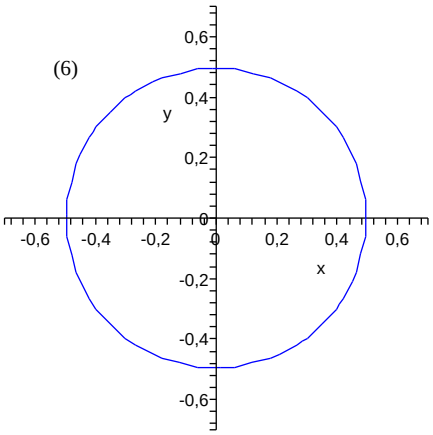
(4)


5,5
5
4,5
y
4
3,5
3
2,5
-1,5
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
x

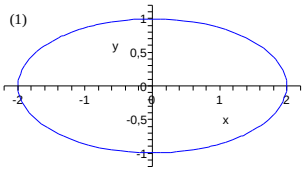
(5)


2
y
x
-2
0
2
4
-2
-4

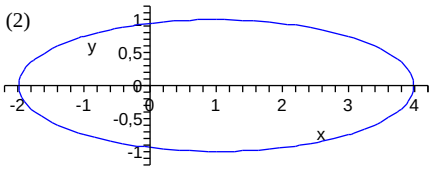
(6)


0,6
0,4
y
0,2
0
-0,6
-0,4
-0,2
0
0,2
0,4
0,6
x
-0,2
-0,4
-0,6

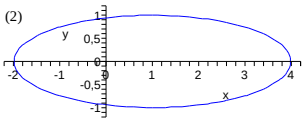
(1)


y
0,5
0
-2
-1
0
1
2
-0,5
x
1
-1

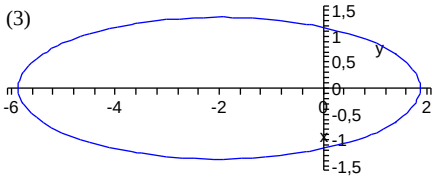
(2)


y
0,5
0
-2
-1
0
1
2
3
4
-0,5
x
1
-1

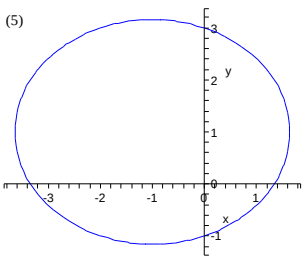
(2)


y
0,5
0
-2
-1
0
1
2
3
4
-0,5
x
1
-1

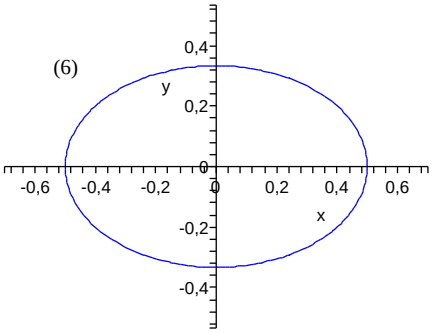
(3)


1,5
1
y
0,5
0
-6
-4
-2
0
2
-0,5
x
-1
-1,5

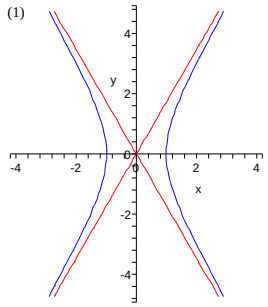
(5)


3
y
2
1
0
-3
-2
-1
0
1
x
-1

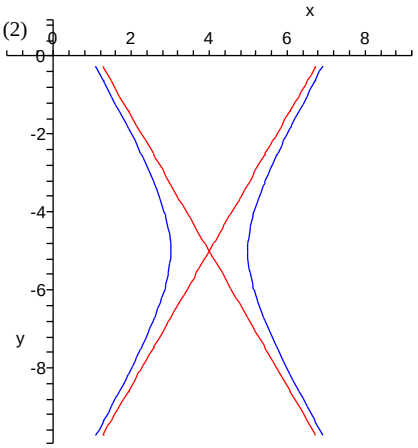
(6)


0,4
y
0,2
0
-0,6
-0,4
-0,2
0
0,2
0,4
0,6
x
-0,2
-0,4

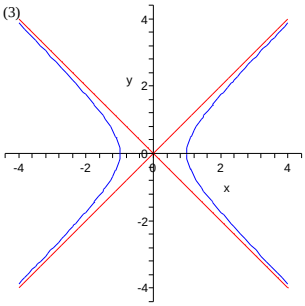
(1)



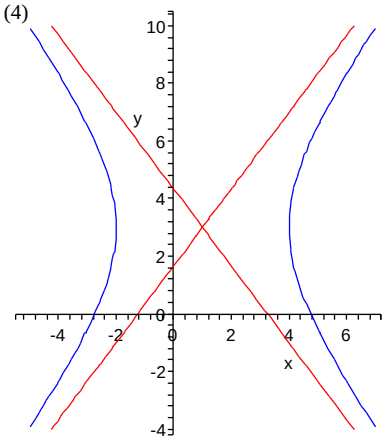
(2)



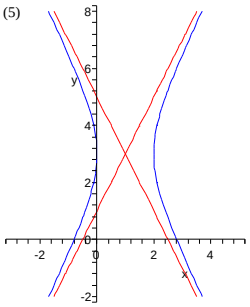
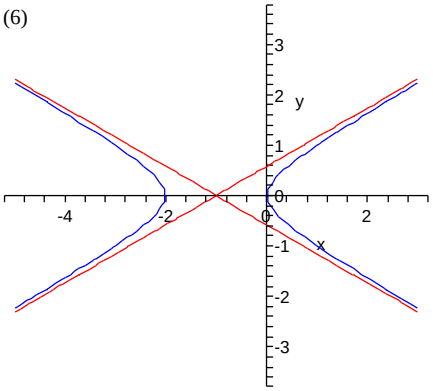
(3)



(4)



(5)



(6)