FONAMENTS MATEMÀTICS

Grau en Enginyeria de la Construcció, Curs 2010-2011

Treball en grup: Métode de la Bisecció

1.- Té alguna arrel la següent equació? Justificar la resposta.

$$\sin(x) - 2x + 1 = 0.$$

Si la resposta és afirmativa, dona una aproximació d'aquesta arrel amb una xifra decimal correcta.

Solució:

Definim $f(x) = \sin x - 2x + 1$ funció continua en $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{r} f(1) = 0.15 < 0 \\ f(0) = 1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, x_0 \in (0,1) \,/\, f(x_0) = 0$$

- $x_1 = \dfrac{1+0}{2} = 0.5 \quad f(x_1) = 0.4794 > 0 \Rightarrow x_0 \in (0.5, 1), \epsilon_1 < 0.5$
- $x_2 = \dfrac{0.5+1}{2} = 0.75 \quad f(x_2) = 0.1816 > 0 \Rightarrow x_0 \in (0.75, 1), \epsilon_2 < 0.25$
- $x_3 = \dfrac{0.75+1}{2} = 0.875 \quad f(x_3) = 0.0175 > 0 \Rightarrow x_0 \in (0.875, 1), \epsilon_3 < 0.125$
- $x_4 = \dfrac{0.875+1}{2} = 0.9375 \quad f(x_4) = -0.0689 < 0 \Rightarrow x_0 \in (0.875, 0.9375), \epsilon_4 < 0.0625$
- $x_5 = 0.90625 \quad f(x_5) = -0.0137 < 0 \Rightarrow x_0 \in (0.875, 0.90625), \epsilon_5 < 0.03125$
- $x_6 = 0.890625 \quad f(x_6) = -0.003 < 0 \Rightarrow x_0 \in (0.875, 0.890625), \epsilon_6 < 0.0156$
- $x_7 = \dfrac{0.875 + 0.890625}{2} = 0.8828125$ arrel aproximada

$$Error = \frac{|b-a|}{2^n} < \epsilon, \quad \epsilon = 10^{-2} \Rightarrow n \geq 6.64 \Rightarrow \text{ 7 iteracions}$$

2.- La funció $y = \tan(x) - \dfrac{1}{2}$ canvïa de signe als extrems de l'interval $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$ i en canvi, no s'anul·la en ell. Contradiu aquest fet el Teorema de Bolzano?

Solució:

No contradiu el teorema de Bolzano perque un dels requisits per poder aplicar el teorema es que la funció sigui continua en l'interval i en aquest cas no ho és.

3.- Demostra que la equació següent té almenys una solució real i dona un interval on es trobi

$$e^{-x} - 4x = -2.$$

Quantes vegades haurien d'aplicar el métode de la bisecció per garantir dues xifres decimal correctes?

Solució:

Definim la funció $f(x) = e^{-x} - 4x + 2$ on el zeros seran solucions de la equació. La funció és continua per ser suma de funcions elementals continues. Per tant, si trobem dos punts on la funció canvïi de signe, pel teorema de Bolzano podrem afirmar que existeix almenys un zero de la equació.

$$\left.\begin{array}{r} f(0) = 3 > 0 \\ f(1) = e^{-1} - 2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, x_0 \in (0,1) \,/\, f(x_0) = 0$$

Si volem 2 xifres decimals correctes demanem un error de $\epsilon < 10^{-3}$:

$$\frac{|b-a|}{2^n} < 10^{-3} \Rightarrow n \geq 9.96 \Rightarrow \text{ 10 iteracions}$$