EXAMEN 4

SOLUCIÓN

17 de enero de 2011

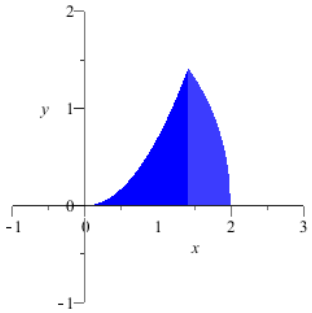
FONAMENTS MATEMÀTICS

Grau d'Enginyeria de la Construcció (E.T.S.E.C.C.P.B.)

Problema 1.. Hallar el área de la siguiente región plana

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 4,\, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\, x^2,\; x \geq 0 \right\}$$

Solución: (i) Obtenemos en primer lugar los puntos de corte de las dos curvas. Sustituyendo el valor $y = \frac{\sqrt{2}}{2}\, x^2$ en la ecuación de la circunferencia obtenemos que $\frac{1}{2}x^4 + x^2 = 4$ sii $x^4 + 2x^2 - 4 = 0$. La solución de esta ecuación bicuadrada es $\boxed{x^2 = 2}$. Por tanto, como $x \geq 0$ tendremos que $\boxed{x = \sqrt{2}}$. La región está representada en la siguiente figura.



Por tanto, el área pedida será:

$$A = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} x^2\, dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx = \left[\begin{array}{l} x = 2\,\mathrm{sen}(t) \longrightarrow dx = 2\cos(t)\, dt \\ x = \sqrt{2} \longrightarrow t = \dfrac{\pi}{4} \\ x = 2 \longrightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{x^3}{3}\bigg|_0^{\sqrt{2}} + 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\, dt = \frac{2}{3} + 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} [1 + \cos(2t)]\, dt = \frac{2}{3} + [2t + \mathrm{sen}(2t)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

© Fonaments Matemàtics, E. Construcció. etseccpb, 2010-11

Problema 2.. Sea $f : [0, e] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1, \\ 1 + \ln(x) & 1 \leq x < e. \end{cases}$$

(i) Hallar la función integral de $f(x)$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
(ii) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $F(x)$.
(iii) Hallar el volumen del sólido que se genera al girar alrededor del eje OX la región comprendida entre $y = f(x)$ e $y = 0$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.
(iv) Hallar el volumen del sólido que se genera al girar alrededor del eje OY la región comprendida entre $y = f(x)$ e $y = 0$ desde $x = 1$ hasta $x = e$.

Solución: Claramente f es acotada en $[0, e]$ y continua en $[0, e]$, ya que en $x = 1$ los límites laterales coinciden con el valor de la función, y por tanto integrable Riemann en $[0, e]$.

(i) Aplicaremos la propiedad de Aditividad de la integral respecto del intervalo y también el Teorema Fundamental del Cálculo en los intervalos $[0, 1]$ y $[1, e]$.

▷ Si $x \in [0, 1]$, resulta que

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{t}\, dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^x = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}.$$

▷ Si $x \in [1, e]$, como $F(1) = \dfrac{2}{3}$, resulta que

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt = F(1) + \int_1^x \Big(1 + \ln(t)\Big)\, dt \\ &= \left[\begin{array}{l} u = \ln(t) \longrightarrow du = \frac{1}{t}\, dt \\ dv = 1 \longrightarrow v = t \end{array} \right] = \frac{2}{3} + t|_1^x + \left(t\ln(t)|_1^x - \int_1^x dt \right) \\ &= \frac{2}{3} + t|_1^x + t\ln(t)|_1^x - t|_1^x = \frac{2}{3} + x\ln(x). \end{aligned}$$

En definitiva,

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}, & 0 \leq x<1,\\ \dfrac{2}{3}+x\ln(x), & 1 \leq x<e.\end{cases}$$

(ii) Nuevamente el Teorema Fundamental del Cálculo nos asegura que F es continua y derivable en $[0,e]$.

(iii) Si V es el volumen del sólido, como $f(x)\geq 0$ para cada $x\in[0,1]$, resulta que

$$V=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1 x\,dx=\pi\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

(iv) Si V es el volumen del sólido, como $f(x)=1+\ln(x)\geq 0$ para cada $x\in[1,e]$, resulta que

$$\begin{aligned}V&=2\pi\int_1^e xf(x)dx=2\pi\int_1^e\Big(x+x\ln(x)\Big)dt=\left[\begin{array}{ll}u=\ln(x) & \to du=\frac{1}{x}dx\\ dv=x & \to v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right]\\ &=2\pi\left[\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^e+\left.\frac{x^2}{2}\ln(x)\right|_1^e-\int_1^e\frac{x}{2}dx\right]=2\pi\left[\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^e+\left.\frac{x^2}{2}\ln(x)\right|_1^e-\left.\frac{x^2}{4}\right|_1^e\right]=\pi\frac{(3e^2-1)}{2}.\end{aligned}$$