EXAMEN 3

SOLUCIÓN

17 de enero de 2011

FONAMENTS MATEMÀTICS

Grau d'Enginyeria de la Construcció (E.T.S.E.C.C.P.B.)

Problema 1. Calcular los valores a, b y c sabiendo que se satisfacen las siguientes propiedades:

(i) La curva de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ tiene un máximo en $x = 1$.

(ii) La normal a la curva $y = ax^2 + bx + c$ en $x = 3$ es paralela a la bisectriz del primer cuadrante y corta al eje de ordenadas en un punto que dista cuatro unidades del origen.

Solución: Los extremos de la función y, y en particular el máximo, se encuentran entre los puntos que anulan su derivada. Como $\boxed{y'(x) = 2ax + b,}$ si $a = 0$, para que y tenga un máximo, necesariamente $b = 0$ y por tanto $y(x) = c$, es decir y es constante. En este caso y tiene un máximo en cada $x \in \mathbb{R}$ y en particular en $x = 1$. Por otra parte, como $y' = 0$, la recta normal en el punto $x = 3$ es la de ecuación $\boxed{x = 3,}$ que no es paralela a la bisectric del primer cuadrante. Por tanto este caso no puede darse, así que necesariamente $\boxed{a \neq 0.}$ Resulta entonces que el único punto crítico de y se presenta en $x = -\dfrac{b}{2a}$. Como la hipótesis asegura que $x = 1$ es un máximo, tenemos que $1 = -\dfrac{b}{2a}$, es decir que $\boxed{b = -2a.}$

Como $\boxed{y(3) = 9a + 3b + c = 3a + c,\ y'(3) = 6a + b = 4a,}$ y la pendiente de la recta normal a y en $x = 3$ es $-\dfrac{1}{y'(3)} = -\dfrac{1}{4a}$, la recta normal a y en $x = 3$ tiene como ecuación

$$Y - y(3) = -\frac{1}{y'(3)}(X - 3), \quad \text{es decir,} \quad Y = -\frac{1}{4a}(X - 3) + 3a + c.$$

La hipótesis de que esta recta es paralela a la bisectriz del primer cuadrante, cuya pendiente es 1, implica que $1 = -\dfrac{1}{4a}$, es decir que $\boxed{a = -\dfrac{1}{4}}$ y por tanto, que la la recta normal a y en $x = 3$ tiene como ecuación $\boxed{Y = X + c - \dfrac{15}{4}}$ y por tanto corta al eje de ordenadas en el punto $\left(0, c - \dfrac{15}{4}\right)$.

Como los únicos puntos del eje de ordenadas que están a distancia 4 del origen son $\boxed{(0, 4) \text{ y } (0, -4),}$ la última hipótesis implica que o bien $4 = c - \dfrac{15}{4}$ o bien $-4 = c - \dfrac{15}{4}$, es decir $\boxed{\text{o bien } c = \dfrac{31}{4} \text{ o bien } c = -\dfrac{1}{4}.}$ En definitiva,

© Fonaments Matemàtics, E. Construcció. etseccpb, 2010-11

$a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$ y o bien $c = -\frac{1}{4}$ o bien $c = \frac{31}{4}$.

Problema 2. Demostrar que la ecuación $2x^3 + 3x^2 - 72x = -12$ tiene tres soluciones distintas y para cada una de ellas determinar un intervalo en el que se encuentran.

Solución: Si consideramos el polinomio de tercer grado $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 72x + 12$, resulta que las soluciones de la ecuación propuesta son exactamente los ceros de p. Por tanto la ecuación propuesta tiene a lo sumo tres soluciones distintas. Si suponemos que $x_1 < x_2 < x_3$ son las soluciones de la ecuación, como $p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = 0$, aplicando el Teorema de Rolle, existirán $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ y $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ tales que $p'(\xi_1) = p'(\xi_2) = 0$.

Como $p'(x) = 6x^2 + 6x - 72 = 6(x^2 + x - 12) = 6(x + 4)(x - 3)$, resulta que $p'(-4) = p(3) = 0$ y por tanto que las raíces, de existir deben buscarse en los intervalos $(-\infty, -4)$, $(-4, 3)$ y $(3, +\infty)$.

Como $p(-4) = 220$ y $p(3) = -123$, aplicando el Teorema de Bolzano, existe una raíz en el intervalo $(-4, 3)$. Como además $p(-7) = -23$ y $p(6) = 120$, el Teorema de Bolzano, nos asegura que existen raíces en los intervalos $(-7, -4)$ y $(3, 6)$. En definitiva hemos demostrado que

p tiene exactamente tres raíces x_1, x_2, x_3 y que además $-7 < x_1 < -4 < x_2 < 3 < x_3 < 6$.