EXAMEN 2

SOLUCIÓN

17 de enero de 2010

FONAMENTS MATEMÀTICS

Grau d'Enginyeria de la Construcció (E.T.S.E.C.C.P.B.)

Problema 1. Estudiar la convergencia y si es posible hallar la suma de las series siguientes:

$$i)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\sqrt{n}}{n+1}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}\right] \qquad ii)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad iii)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n$$

Solución: (i) Si $b_n=\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$, la serie se expresa como $\sum_{n=0}^{\infty}(b_n-b_{n+1})$, es decir es una serie telescópica. Como $b_0=0$ y $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}=0$, obtenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\sqrt{n}}{n+1}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}(b_n-b_{n+1})=b_0-\lim_{n\to\infty}b_n=0.$$

(ii) Si $r=\dfrac{2}{3}$, la serie se expresa como $\sum_{n=0}^{\infty}r^n$, es decir es una serie geométrica cuya razón tiene módulo menor estrictamente que 1 y por tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}r^n=\frac{1}{1-r}=3.$$

(iii) Si $r=\dfrac{5}{3}$, la serie se expresa como $\sum_{n=0}^{\infty}r^n$, es decir es una serie geométrica cuya razón es positiva y tiene módulo mayor estrictamente que 1 y por tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}r^n=+\infty.$$

© Fonaments Matemàtics, E. Construcció. etseccpb, 2010-11

Problema 2. Resolver las siguientes cuestiones:

(a) Hallar los elementos característicos de las cuádricas siguientes:

$$(i)\ x^2-2x-4y+y^2+z^2=-2 \qquad (ii)\ 9x^2+18x+4y^2-8y-z^2=23$$

(b) Hallar los cortes por planos perpendiculares al eje OZ de la cuádrica

$$9x^2+18x+4y^2-8y+z^2=23.$$

Solución: (a) Para resolver este ejercicio completaremos cuadrados.

(i) En este caso tenemos que $x^2-2x-4y+y^2+z^2=(x-1)^2+(y-2)^2+z^2-5$ y por tanto la cuádrica se expresa como

$$(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=3,$$

es decir se trata de una Esfera de centro $C=(1,2,0)$ y radio $R=\sqrt{3}$.

(ii) En este caso tenemos que

$$9x^2+18x+4y^2-8y-z^2=9(x^2+2x)+4(y^2-2y)-z^2=9(x+1)^2+4(y-1)^2-z^2-13$$

y por tanto la cuádrica se expresa como

$$\frac{(x+1)^2}{2^2}+\frac{(y-2)^2}{3^2}-\frac{z^2}{6^2}=1,$$

es decir se trata de un Hiperboloide de una hoja de centro $C=(-1,2,0)$ y semiejes $a=2$, $b=3$ y $c=6$.

(b) Los planos perpendiculares al eje OZ tienen por ecuación $z=k$, donde $k\in\mathbb{R}$.

Si $z=k$, entonces el corte tiene por ecuación $9x^2+18x+4y^2-8y+k^2=23$, es decir

$9(x^2+2x)+4(y^2-2y)=23-k^2$, o de forma equivalente, $9(x+1)^2+4(y-1)^2=36-k^2$.

Por tanto, si $|k|>6$, el plano $z=k$ no corta a la cuádrica, si $k=\pm 6$, el plano $z=k$ corta a la cuádrica en el punto $(-1,1,k)$ y si $|k|<6$ el corte del plano $z=k$ con la cuádrica es una elipse centrada en $(-1,1)$ y de semiejes $a=\dfrac{\sqrt{36-k^2}}{3}$ y $b=\dfrac{\sqrt{36-k^2}}{2}$.

Problema 3. Calcular los límites siguientes:

$$(i)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^3)-1}{x^6} \qquad (ii)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{senh}(x)}{x^3} \qquad (iii)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\Big(1+\operatorname{sin}\left(x^2y^2\right)\Big)^{\frac{1}{\sqrt{x^2y^2}}}$$

Solución: (i) Sabemos que si $f(x)$ es un infinitésimo cuando $x\to 0$, entonces $1-\cos\big(f(x)\big)$ es un infinitésimo equivalente a $\dfrac{f(x)^2}{2}$. Por tanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^3)-1}{x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^6}{2}}{x^6}=-\frac{1}{2}.$$

(ii) Sabemos que $\operatorname{senh}(x)$ es un infinitésimo equivalente a x. Por tanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{senh}(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty.$$

(iii) Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\operatorname{sin}\left(x^2y^2\right)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2y^2}=0,$ estamos ante una indeterminación del tipo 1^∞. Por otra parte, sabemos que si $\lim\limits_{x\to 0}a(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to 0}b(x)=+\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to 0}\big(1+a(x)\big)^{b(x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}a(x)b(x)}$. Además como $\operatorname{sen}(x^2y^2)$ es un infinitésimo equivalente a x^2y^2, resulta que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{sin}\left(x^2y^2\right)}{\sqrt{x^2y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2y^2}=0.$$

Aplicando los resultados anteriores, obtenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\Big(1+\operatorname{sin}\left(x^2y^2\right)\Big)^{\frac{1}{\sqrt{x^2y^2}}}=e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{sin}\left(x^2y^2\right)}{\sqrt{x^2y^2}}}=e^0=1.$$

© Fonaments Matemàtics, E. Construcció. etseccpb, 2010-11