EXAMEN 1

SOLUCIÓN

17 de enero de 2011

FONAMENTS MATEMÀTICS

Grau d'Enginyeria de la Construcció (E.T.S.E.C.C.P.B.)

Problema 1. Resolver las siguientes cuestiones:

(i) Hallar el interior, la adherencia, los puntos de acumulación, la frontera y los puntos aislados del conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant x,\ x + y \leqslant 4\}.$$

Justificar si A es cerrado, abierto o compacto.

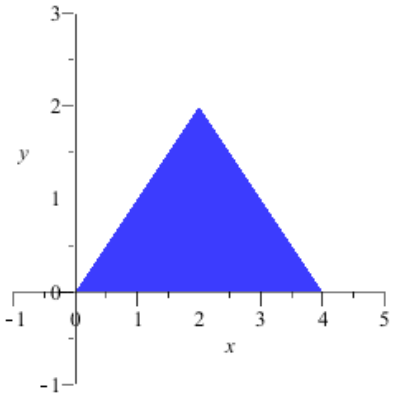
(ii) Demostrar la siguiente igualdad

$$\sec^2(x) + \operatorname{cosec}^2(x) = 4 \operatorname{cosec}^2(2x).$$

(iii) Sabiendo que $\sec(x) = 3$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, calcular el seno y el coseno de x.

Solución:

(i) El conjunto A está representado en la siguiente Figura. Como el conjunto está contenido dentro de la bola de centro $(0, 0)$ y radio 5, deducimos que es un conjunto acotado.



© Fonaments Matemàtics, E. Construcció. etseccpb, 2010-11

(a) El interior de $\overset{\circ}{A}$, consiste de los puntos $x \in A$ tales que existe $r > 0$ y $B_r(x) \subset A$. Por tanto, $\overset{\circ}{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x,\ x + y < 4\}$. Lo que en particular implica que el conjunto no es abierto.

(b) El conjunto de puntos adherente $\bar{A}$, consiste de los $x \in \mathbb{R}$ tales que para todo $r > 0$, $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$. Por tanto, $\bar{A} = A$; es decir, el conjunto es cerrado.

(c) El conjunto de puntos aislados $\mathsf{Ais}(A)$, consiste de los $x \in A$ tales que existe $r > 0$, $B_r(x) \cap A = \{x\}$. Por tanto, $\mathsf{Ais}(A) = \emptyset$.

(d) De la propiedad, $A' = \bar{A} \setminus \mathsf{Ais}(A)$, obtenemos que $A' = A$.

(e) El conjunto de puntos frontera ∂A, consiste de los $x \in \mathbb{R}$ tales que para todo $r > 0$, $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$ y $B_r(x) \cap A^c \neq \emptyset$. Por tanto, $\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, 0 \leqslant x \leqslant 4\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x, 0 \leqslant x \leqslant 2\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 4, 2 \leqslant x \leqslant 4\}$.

Finalmente, el conjunto A es compacto ya que es cerrado y acotado.

(ii) Utilizando las definiciones de las funciones trigonométricas obtenemos que

$$\sec^2(x) + \operatorname{cosec}^2(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} + \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(2x)^2}{4}} = 4\operatorname{cosec}^2(2x),$$

donde hemos utilizado las identidades trigonométricas $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$, $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$.

(iii) Como $\sec(x) = 3$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, tenemos que $\cos(x) = \frac{1}{3}$ y que $\operatorname{sen}(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

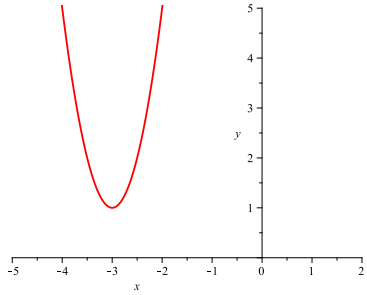
Problema 2. Dar los elementos característicos y representar las siguientes cónicas:

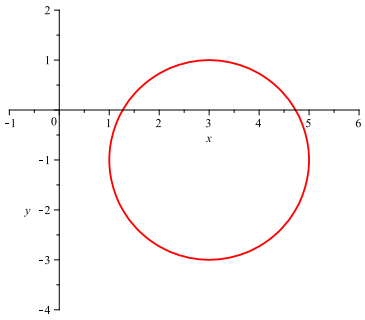
$$(i)\ y = 4x^2 + 24x + 37 \qquad (ii)\ x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0 \qquad (iii)\ x^2 - 4y^2 - 2x = 3.$$

Solución:

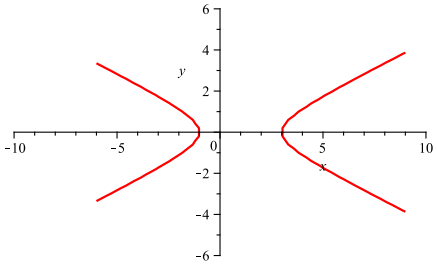
(i) La curva $y = 4x^2 + 24x + 37$ representa una parábola de vértice el punto $(-3, 1)$ y foco el punto $\left(-3, \frac{17}{16}\right)$, ya que su ecuación reducida es $4 \cdot \frac{1}{16}(y-1) = (x+3)^2$.

(ii) La curva $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ representa una circunferencia de centro $(3, -1)$ y radio 2, ya que $x^2 - 6x + y^2 + 2y = (x-3)^2 + (y+1)^2 - 10$; es decir, su ecuación reducida es $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$.





(iii) La curva $\boxed{x^2-4y^2-2x=3}$ representa una hipérbola de ecuación reducida $\boxed{\dfrac{(x-1)^2}{4}-y^2=1,}$ por tanto los semiejes son $\boxed{a=2}$ y $\boxed{b=1.}$ Las asíntotas son las rectas $\boxed{2y-x=-1}$ y $\boxed{2y+x=1.}$



Problema 3. Calcular los siguientes límites:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(3n^2+4n)^2(n^3-3)^2(2n-7)}{(n+2)^3(n^3-3n)^2(2n^2-17)}\quad (ii)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}\right)\quad (iii)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+1}.$$

Solución:

$$(i)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(3n^2+4n)^2(n^3-3)^2(2n-7)}{(n+2)^3(n^3-3n)^2(2n^2-17)}=\frac{18}{2}=9,$$

© Fonaments Matemàtics, E. Construcció. etseccpb, 2010-11

donde se ha utilizado el criterio del cociente de polinomios del mismo grado, en este caso grado 11.

$$(ii)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}\right)}{\left(\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\left(\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}\right)} = 1.$$

$$(iii)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+1} = e^{\lim_{n\to\infty}(n+1)\frac{1}{n+2}} = e.$$