EXAMEN 4

SOLUCIÓN

13 de enero de 2011

FONAMENTS MATEMÀTICS

Grau d'Enginyeria de la Construcció (E.T.S.E.C.C.P.B.)

Problema 1. Resolver las siguientes cuestiones:

(i) La base de un sólido es la región del primer cuadrante acotada por la gráfica de $y = 1 - \frac{x^2}{4}$, el eje OX y el eje OY. Supóngase que las secciones transversales perpendiculares al eje OX son rectángulos de altura el doble que la base. Encontrar el volumen del sólido.

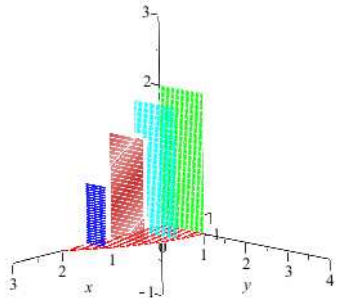
(ii) Hallar $\int_{-4}^{4} \operatorname{senh}(\operatorname{sen}(x))\, dx$.

(iii) Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función par, continua en $\mathbb{R}$ y tal que $g(1) = 4$. Definimos la función

$$f(x) = \int_{-x}^{x} t^2 g(t)\, dt.$$

Calcular $f'(1)$. (5 puntos)

Solución: (i) Observamos en primer lugar que, en el primer cuadrante, $y(x) = 1 - \frac{x^2}{4} = 0$ sii $x = 2$. Como las secciones del sólido son rectángulos, de base $y(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ y altura $2y(x)$, el área de la sección es $A(x) = 2y^2(x)$. Por tanto, podemos aplicar la fórmula del volumen por secciones, Principio de Cavalieri:



$$V = \int_0^2 A(x)dx = \int_0^2 2\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2 dx = \int_0^2 \left(2 - x^2 + \frac{x^4}{8}\right) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{40}\right)_0^2 = \frac{32}{15}.$$

(ii) Como la función $f(x) = \operatorname{senh}(\operatorname{sen}(x))$ es impar, su integral en cualquier intervalo simétrico respecto del origen es 0. Por tanto,

© Fonaments Matemàtics, E. Construcció. etseccpb, 2010-11

$$\int_{-4}^{4} \operatorname{senh}(\operatorname{sen}(x))\, dx = 0.$$

(iii) Como $g(t)$ es una función continua, por el Teorema Fundamental del Cálculo, f es derivable y además,

$$f'(x) = x^2 g(x) - x^2 g(-x)(-1) = x^2 g(x) + x^2 g(-x) = 2x^2 g(x),$$

ya que g es una función par. Por tanto,

$$f'(1) = 2g(1) = 8.$$

Problema 2. Sea $f : [-5, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi - 1 & -5 \leqslant x < -\pi, \\ \cos(x) & -\pi \leqslant x < \pi, \\ e^{x-4} & \pi \leqslant x < 4 \\ \cosh(x-4) & 4 \leqslant x \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

(i) Hallar la función integral de $f(x)$, $F(x) = \displaystyle\int_{-5}^{x} f(t)dt$.
(ii) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $F(x)$.
(iii) Hallar el volumen del sólido que se genera al girar alrededor del eje OX la región comprendida entre $y = f(x)$ e $y = 0$ desde $x = \pi$ hasta $x = 2\pi$.
(iv) Hallar el volumen del sólido que se genera al girar alrededor del eje OY la región comprendida entre $y = f(x)$ e $y = 0$ desde $x = 0$ hasta $x = \dfrac{\pi}{2}$. (5 puntos)

Solución: Claramente f es acotada en $[0, 2\pi]$ y continua en $[-5, 2\pi] \setminus \{\pi\}$ y por tanto integrable Riemann en $[0, 2\pi]$.

(i) Aplicaremos la propiedad de Aditividad de la integral respecto del intervalo y también el Teorema Fundamental del Cálculo en los intervalos $[-5, -\pi]$, $[-\pi, \pi]$, $[\pi, 4]$ y $[4, 2\pi]$.

▷ Si $x \in [-5, -\pi]$, resulta que

$$F(x) = \int_{-5}^{x} (t+\pi-1)dt = \frac{t^2}{2} + t(\pi-1)\Big|_{-5}^{x} = \frac{x^2}{2} + x(\pi-1) - \frac{25}{2} + 5(\pi-1) = \frac{x^2}{2} + x(\pi-1) + 5\pi - \frac{35}{2}.$$

▷ Si $x \in [-\pi, \pi]$, como $F(-\pi) = \frac{1}{2}\big(\pi(12-\pi)-35\big)$, resulta que

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-5}^{x} f(t)dt = \int_{-5}^{-\pi} f(t)dt + \int_{-\pi}^{x} f(t)dt = F(-\pi) + \int_{-\pi}^{x} \cos(t)dt \\ &= F(-\pi) + \operatorname{sen}(t)\Big|_{-\pi}^{x} = F(-\pi) + \operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2}\big(\pi(12-\pi)-35\big) + \operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

▷ Si $x \in [\pi, 4]$, como $F(\pi) = \frac{1}{2}\big(\pi(12-\pi)-35\big)$, resulta que

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-5}^{x} f(t)dt = \int_{-5}^{\pi} f(t)dt + \int_{\pi}^{x} f(t)dt = F(\pi) + \int_{\pi}^{x} e^{t-4}dt \\ &= F(\pi) + e^{t-4}\Big|_{\pi}^{x} = F(\pi) + e^{x-4} - e^{\pi-4} = \frac{1}{2}\big(\pi(12-\pi)-35\big) + e^{x-4} - e^{\pi-4}. \end{aligned}$$

▷ Si $x \in [4, 2\pi]$, como $F(4) = \frac{1}{2}\big(\pi(12-\pi)-35\big) + 1 - e^{\pi-4}$, resulta que

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-5}^{x} f(t)dt = \int_{-5}^{4} f(t)dt + \int_{4}^{x} f(t)dt = F(4) + \int_{4}^{x} \cosh(t-4)dt \\ &= F(4) + \operatorname{senh}(t-4)\Big|_{4}^{x} = F(4) + \operatorname{senh}(x-4) = \frac{1}{2}\big(\pi(12-\pi)-35\big) + 1 - e^{\pi-4} + \operatorname{senh}(x-4). \end{aligned}$$

En definitiva,

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + x(\pi-1) + 5\pi - \dfrac{35}{2}, & -5 \leqslant x < -\pi, \\ \dfrac{1}{2}\big(\pi(12-\pi)-35\big) + \operatorname{sen}(x), & -\pi \leqslant x < \pi, \\ \dfrac{1}{2}\big(\pi(12-\pi)-35\big) + e^{x-4} - e^{\pi-4}, & \pi \leqslant x < 4 \\ \dfrac{1}{2}\big(\pi(12-\pi)-35\big) + 1 - e^{\pi-4} + \operatorname{senh}(x-4). & 4 \leqslant x \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

(ii) Nuevamente el Teorema Fundamental del Cálculo nos asegura que F es continua en $[-5, 2\pi]$ y derivable al menos en $[-5, 2\pi] \setminus \{\pi\}$. Además, $F'(x) = f(x)$ para cada $x \in [-5, 2\pi] \setminus \{\pi\}$, lo que aplicando la Regla de L'Hôpital implica que

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^-}F'(x)=\lim_{x\to\pi^-}f(x)=-1\neq e^{\pi-4}=\lim_{x\to\pi^+}f(x)=\lim_{x\to\pi^+}F'(x)=\lim_{x\to\pi^+}\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}$$

y en conclusión F no es derivable en π.

(iii) Si V es el volumen del sólido, como $f(x)\geqslant 0$ para cada $x\in[\pi,2\pi]$, resulta que

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_\pi^{2\pi}f^2(t)dt=\pi\left[\int_\pi^4 f^2(t)dt+\int_4^{2\pi}f^2(t)dt\right]=\pi\int_\pi^4 e^{2(t-4)}dt+\pi\int_4^{2\pi}\cosh^2(t-4)dt\\&=\frac{\pi}{2}\,e^{2(t-4)}\Big|_\pi^4+\pi\int_4^{2\pi}\left[\frac{1+\cosh\big(2(t-4)\big)}{2}\right]dt=\frac{\pi}{2}\left[1-e^{2(\pi-4)}\right]+\pi\left[\frac{t}{2}+\frac{\operatorname{senh}\big(2(t-4)\big)}{4}\right]_4^{2\pi}\\&=\frac{\pi}{2}\left[1-e^{2(\pi-4)}\right]+\pi\left[\pi+\frac{\operatorname{senh}\big(4(\pi-2)\big)}{4}-2\right]=\frac{\pi}{4}\left[4\pi-6-2e^{2(\pi-4)}+\operatorname{senh}\big(4(\pi-2)\big)\right].\end{aligned}$$

(iv) Si V es el volumen del sólido, como $f(t)=\cos(t)\geqslant 0$ para cada $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, resulta que

$$\begin{aligned}V&=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}tf(t)dt=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos(t)dt=\left[\begin{array}{ll}u=t & \to du=dt\\ dv=\cos(t) & \to v=\operatorname{sen}(t)\end{array}\right]\\&=2\pi\left[t\operatorname{sen}(t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}(t)dt\right]=2\pi\Big[t\operatorname{sen}(t)+\cos(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\pi\Big[\frac{\pi}{2}-1\Big]=\pi(\pi-2).\end{aligned}$$