EXAMEN 3

SOLUCIÓN

2 de diciembre de 2010

FONAMENTS MATEMÀTICS

Grau d'Enginyeria de la Construcció (E.T.S.E.C.C.P.B.)

Problema 1. Sean $f, g : R^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\arctan(xy)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{senh}(xy)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de las funciones f, g en $\mathbb{R}^2$.

Solución:

Las funciones f, g son continuas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ por ser cociente de funciones continuas en $\mathbb{R}^2$ y ser $(0,0)$ el único punto donde el denominador se anula. Así pues, en ambos casos, el único punto donde falta estudiar la continuidad es el punto $(0,0)$, por lo que debemos calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y).$$

Para ello tendremos en cuenta que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$ y que $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\arctan z}{z} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{senh} z}{z} = 1.$

Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones, obtenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\arctan(xy)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} \quad \text{y que} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{senh}(xy)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Por otra parte, la desigualdad $2|x|\,|y| \leqslant x^2+y^2$ implica que $\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$, de forma que $\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ es el producto de una función que tiene a 0 por una acotada, lo que implica que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0).$$

© Fonaments Matemàtics, E. Construcció. etseccpb, 2010-11

y, en definitiva, que f es continua en $(0,0)$ y por tanto continua en $\mathbb{R}^2$.

Por otra parte, si consideramos la recta de pendiente m, entonces $\boxed{y = mx}$ y

$$\lim_{x\to 0} g(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2},$$

lo que implica que g tiene en 0 diferentes límites direccionales, por lo que no tiene límite en $(0,0)$ y por tanto no es una función continua en $(0,0)$.

Problema 2. 1.- (i) Demostrar que la función $f(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{2}(2-x) - 1$ tiene exactamente dos ceros en $(-1, +\infty)$ y dar un intervalo en el que se encuentre cada uno de ellos.
(ii) Hallar las rectas tangente y normal a la función $f(x)$ en el punto $x = 0$.
(iii) Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x)$ en un entorno de $x = 0$.

Solución:

(i) Aplicamos los Teoremas de Bolzano y Rolle conjuntamente. Para ello tenemos en cuenta que la función es continua y derivable en $(-1, +\infty)$ ya que es suma de una función polinómica y el logarítmo de valores positivos. Por tanto, podemos aplicar el Teorema de Rolle. Calculamos f' y estudiamos sus ceros:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} + 1 - x = \frac{2-x^2}{1+x}.$$

Por tanto, tenemos que en $(-1, +\infty)$

$$f'(x) = 0 \iff x = \sqrt{2}.$$

Como f' se anula una vez en $(-1, +\infty)$, f tendrá a la sumo 2 ceros. Para demostrar que efectivamente los tiene basta encontrar dos intervalos donde la función cambie de signo en los extremos y aplicar el Teorema de Bolzano.

Probamos en el intervalo $[0, e-1]$,

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(e-1) = \frac{1}{2}(e-1)(3-e) > 0 \end{array}\right\} \implies \text{existe } x_0 \in (0, e-1) \text{ tal que } f(x_0) = 0.$$

Ahora probamos con intervalo $[e-1, e^2-1]$,

$$\left.\begin{array}{l} f(e-1) > 0 \\ f(e^2-1) = 1 + \dfrac{1}{2}(e^2-1)(3-e^2) < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{existe } x_1 \in (e-1, e^2-1) \text{ tal que } f(x_1) = 0.$$

(ii) Recordamos en primer lugar que la recta tangente a una curva $y = f(x)$ en el punto $x = a$ está dada por

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)(x-a).}$$

Por tanto, teniendo en cuenta que

$$f'(x) = \frac{2-x^2}{1+x},\ f'(0) = 2 \text{ y } f(0) = -1$$

la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$ es $y + 1 = 2x$; es decir,

$$\boxed{y = 2x - 1.}$$

Por otro lado, la ecuación de la recta normal a una curva $y = f(x)$ en el punto $x = a$ está dada por

$$\boxed{y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x-a).}$$

Por tanto, la recta normal a $f(x)$ en $x = 0$ es $y + 1 = -\dfrac{1}{2}x$; es decir,

$$\boxed{2y + x + 2 = 0.}$$

(iii) La fórmula del polinomio de Taylor de orden dos entorno de $x = 0$ es:

$$\boxed{P_{2,0}f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2.}$$

Teniendo en cuenta que,

$$f''(x) = \frac{-x^2 - 2x - 2}{(1+x)^2}, \qquad f''(0) = -2$$

obtenemos que

$$P_{2,0}f(x) = -1 + 2x - x^2.$$

Problema 3. Un almacén de $384\ m^3$ de volumen, tiene forma de prisma recto de base rectangular con el lado mayor 4 veces el lado menor. Se sabe que la pérdida de calor a través de las paredes laterales es de 160 calorías por m^2, mientras que a través del techo es de 300 calorías por m^2. El suelo está aislado por lo que la pérdida de calor a través de él es nula. Calcular las dimensiones del almacén para que la pérdida de calor sea mínima y determinar las calorías que se pierden en ese caso.

Solución: Denominaremos x a la longitud de lado menor de la base e y a la altura del prisma, medidas en metros, lo que implica que $4x^2y = 384$ y por tanto que $y = \dfrac{96}{x^2}$.

El área lateral del prisma es $2(xy + 4xy) = 10xy = \dfrac{960}{x}\ m^2$, mientras que el área del techo es $4x^2\ m^2$.

Si consideramos P, la función de pérdida de calorías, resulta que

$$P(x) = 160 \cdot \frac{960}{x} + 1200\, x^2 = 1200\left[\frac{128}{x} + x^2\right], \qquad x \in (0, +\infty).$$

El problema planteado consiste en determinar el mínimo absoluto de P. Para ello, recordemos que todo mínimo absoluto de P es también mínimo relativo y por tanto ha de anular la derivada de P. Como

$$P'(x) = 1200\left[-\frac{128}{x^2} + 2x\right] = \frac{2400}{x^2}\left[x^3 - 64\right],$$

resulta que el único punto candidato a extremo debe satisfacer que $x^3 = 64$, es decir es $x = 4$. Como además,

$$P'(x) < 0 \text{ si } x < 4 \text{ y } P'(x) > 0 \text{ si } x > 4,$$

P es estrictamente decreciente a la izquierda de 4 y estrictamente creciente a la derecha de 4, lo que implica que 4 es un mínimo absoluto de P. Como además $P(4) = 1200 \cdot 48 = 57600,$ obtenemos que las dimensiones del almacen que hacen que la pérdida de calor sea mínima son 4 metros de lado pequeño de la base, 16 metros de lado mayor de la base y 8 metros de altura. en este caso la pérdida de calor es de 57600 calorías.

Problema 4. Sea $f : [-2\pi, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & -2\pi \leqslant x < 0, \\ \cosh(x) & 0 \leqslant x < 2, \\ \cosh(2) + \operatorname{sen}(x-2) & 2 \leqslant x \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

(i) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de f en su dominio de definición.
(ii) Estudiar los extremos relativos y absolutos de f en $[-2, 2\pi]$.

Solución: (i) Claramente f es continua en $[-2, 2\pi] \setminus \{0, 2\}$ y derivable en $(-2\pi, 2\pi) \setminus \{0, 2\}$ por lo que sólo tenemos analizar si estas propiedades se satisfacen o no en los puntos 0 y 2.

Por una parte,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{-x} = 1, \ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \cosh(x) = 1,$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \cosh(x) = \cosh(2) \text{ y } \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \Big[\cosh(2) + \operatorname{sen}(x-2)\Big] = \cosh(2),$$

lo que implica que f es continua en $[-2\pi, 2\pi]$.

Por otra parte,

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & -2\pi < x < 0, \\ \operatorname{senh}(x) & 0 < x < 2, \\ \cos(x-2) & 2 < x < 2\pi. \end{cases}$$

lo que implica que

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} -e^{-x} = -1, \ \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{senh}(x) = 0,$$
$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} \operatorname{senh}(x) = \operatorname{senh}(2) \text{ y } \lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} \Big[\cos(x-2)\Big] = 1 < \operatorname{senh}(2),$$

y por tanto que f no es derivable ni en 0 ni en 2.

(ii) El Teorema de Weierstrass asegura que f tiene extremos absolutos en $[-2\pi, 2\pi]$. Dichos extremos se locarizarán o bien en los puntos -2π, 0, 2, ó 2π, o bien en los intervalos $(-2\pi, 0)$, $(0, 2)$ ó $(2, 2\pi)$.

Si algún extremos se alcanza en uno de los tres intervalos, ha de anular allí la derivada.

Como $f'(x) = -e^{-x} < 0$ si $x \in (-2\pi, 0)$, en este intervalo la función es estrictamente decreciente y por tanto no tiene extremos locales.

Como $f'(x) = \operatorname{senh}(x) > 0$ si $x \in (0, 2)$, en este intervalo la función es estrictamente creciente y por tanto no tiene extremos locales.

Finalmente, si $z = x-2$, entonces $z \in \big(0, 2(\pi-1)\big)$ cuando $x \in (2, 2\pi)$. Como $\cos(z) = 0$ para $z \in (0, 2\pi)$ si y sólo si $z = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2} > 2(\pi-1)$, resulta que si $x \in (0, 2\pi)$ entonces $f'(x) = \cos(x-2) = 0$ sii $x = \dfrac{\pi}{2} + 2$. Además, si $2 < x < \dfrac{\pi}{2} + 2$, entonces $f'(x) = \cos(x-2) > 0$ y por tanto en este intervalo la función es estrictamente creciente, mientras que si $\dfrac{\pi}{2} + 2 < x < 2\pi$, entonces $f'(x) = \cos(x-2) < 0$ y por tanto en este intervalo la función es estrictamente decreciente. Así pues, $\dfrac{\pi}{2} + 2$ es un máximo relativo de f, lo que no excluye, *a priori* que pueda ser tambiémn un máximo absoluto.

Los candidatos a extremos absolutos han quedado pues reducidos a los puntos -2π, 0, 2, $\dfrac{\pi}{2} + 2$ y 2π, de manera que sólo queda valorar la función f en ellos. Como

$$f(-2\pi) = e^{2\pi}, \quad f(0) = 1, \quad f(2) = \cosh(2) \quad f(\tfrac{\pi}{2} + 2) = 1 + \cosh(2) \quad \text{y} \quad f(2\pi) = \cosh(2) - \operatorname{sen}(2).$$

Como $e^{2\pi} > \cosh(2) + 1$, resulta que f tiene un máximo absoluto en -2π.

Como $1 < \cosh(2) - \operatorname{sen}(2)$, resulta que f tiene un mínimo absoluto en 0.

Como $f(\frac{\pi}{2} + 2) < f(-2\pi)$, f tiene un máximo relativo en $\frac{\pi}{2} + 2$ que no es absoluto.

Como tanto a la izquierda de 2 como a la derecha de 2, la función f es estrictamente creciente, f no tiene en 2 ningún extremo relativo, de manera que 2 es un punto de inflexión de f.

Como f es decreciente a la derecha de $\frac{\pi}{2} + 2$ y $f(2\pi) < f(-2\pi)$, f tiene un mínimo relativo en 2π.