EXAMEN 2

SOLUCIÓN

2 de noviembre de 2010

FONAMENTS MATEMÀTICS

Grau d'Enginyeria de la Construcció (E.T.S.E.C.C.P.B.)

Problema 1. Calcular los siguientes límites:

$$(i)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{\arctan(1)+\arctan(2)+\cdots+\arctan(n)}{n} \qquad (ii)\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n^3+n^2}{3n^3+2}\right)^{2n+1}$$

Solución: (i) Si definimos $a_n = \arctan(1)+\arctan(2)+\cdots+\arctan(n)$ y $b_n = n$, debemos calcular $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$. Como b_n es una sucesión creciente y $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, podemos aplicar el Criterio de Stolz por lo que, teniendo en cuenta que $a_{n+1}-a_n = \arctan(n+1)$ y $b_{n+1}-b_n = 1$, obtenemos que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to+\infty}\arctan(n+1) = \frac{\pi}{2}$$

y, en definitiva,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\arctan(1)+\arctan(2)+\cdots+\arctan(n)}{n} = \frac{\pi}{2}.$$

(ii) Como $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^3+n^2}{3n^3+2} = 1$ y $\lim_{n\to+\infty} 2n+1 = +\infty$, estamos ante una indeterminación del tipo 1^∞ y podemos aplicar el método de resolución de este tipo de indeterminaciones. Concretamente, si definimos $a_n = 2n+1$ y $b_n = \frac{3n^3+n^2}{3n^3+2}$, debemos calcular $\lim_{n\to+\infty} b_n^{a_n}$, y por tanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n^3+n^2}{3n^3+2}\right)^{2n+1} = e^{\lim_{n\to+\infty} a_n(b_n-1)} = e^{\lim_{n\to+\infty}(2n+1)\left[\frac{3n^3+n^2}{3n^3+2}-1\right]} = e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)(n^2-2)}{3n^3+2}} = \sqrt[3]{e^2}.$$

De forma alternativa, observamos que

$$\frac{3n^3+n^2}{3n^3+2} = \frac{3n^3+2+n^2-2}{3n^3+2} = 1+\frac{n^2-2}{3n^3+2} = 1+\frac{1}{\frac{3n^3+2}{n^2-2}},$$

de manera que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n^3+n^2}{3n^3+2}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n^3+2}{n^2-2}}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3n^3+2}{n^2-2}}\right)^{\frac{3n^3+2}{n^2-2}}\right]^{\frac{n^2-2}{3n^3+2}}\right]^{(2n+1)}$$

y por tanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n^3+n^2}{3n^3+2}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3n^3+2}{n^2-2}}\right)^{\frac{3n^3+2}{n^2-2}}\right]^{\frac{(2n+1)(n^2-2)}{3n^3+2}} = \sqrt[3]{e^2}.$$

Problema 2. Estudiar la convergencia y, si es posible, sumar las series de números reales siguientes:

$$(i)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n} \qquad (ii)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}(n)}{\sqrt{n}}-\frac{\operatorname{sen}(n+1)}{\sqrt{n+1}}\right) \qquad (iii)\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$$

Solución: (i) Se trata de una serie geométrica de razón $\frac{1}{3}$, por lo que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

(ii) Si definimos $b_n = \dfrac{\operatorname{sen}(n)}{\sqrt{n}}$, entonces $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ ya que b_n es producto de una sucesión acotada, $\operatorname{sen}(n)$, por otra que tiende a 0, $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Además

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}(n)}{\sqrt{n}}-\frac{\operatorname{sen}(n+1)}{\sqrt{n+1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n-b_{n+1}\right),$$

que es una serie telescópica. Por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}(n)}{\sqrt{n}}-\frac{\operatorname{sen}(n+1)}{\sqrt{n+1}}\right)=b_1-\lim_{n\to+\infty}b_{n+1}=\operatorname{sen}(1)$$

(iii) Como la serie es de términos positivos, podemos usar el Criterio de comparación. Si consideramos $a_n=\ln\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)$ y $b_n=\dfrac{1}{n^3}$, entonces como $\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\sim\frac{1}{n^3}$ tenemos que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}}=1$$

de manera que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$ tiene el mismo carácter que la serie de Riemann $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ que es convergente, y en conclusión,

la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$ es convergente.

Problema 3. Consideramos la superficie $z=\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}$.

(i) Hallar las curvas de nivel de la superficie obtenidas al hacer cortes por los planos $z=0$, $z=1$ y $z=-1$.

(ii) Hallar las curvas de nivel de la superficie obtenidas al hacer cortes por planos paralelos al plano xy.

(iii) Hallar las curvas de nivel de la superficie obtenidas al hacer cortes por planos paralelos al plano zy. Especificar la curva $x=0$.

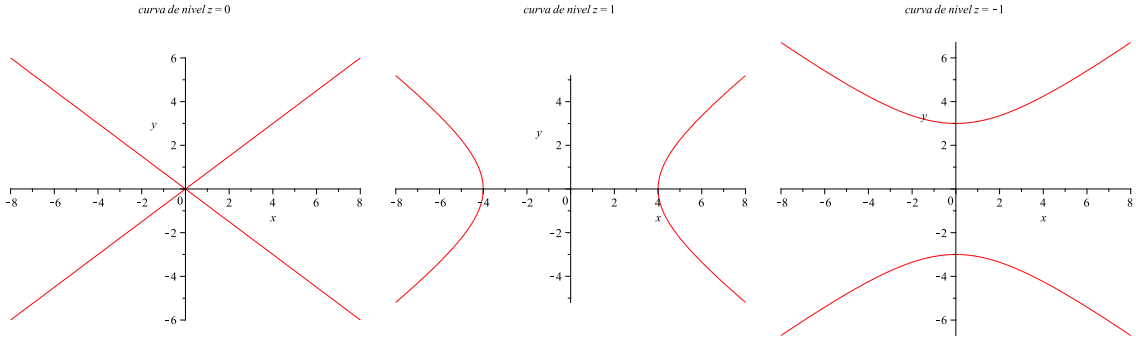
(iv) Representar la superficie e identificarla.

Solución:

(i) Consideramos en primer lugar, $z=0$. La curva de nivel correspondiente es,

$$C_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 0\right\}$$

Son dos rectas que se cortan en el $(0,0)$: $y = \pm\dfrac{3x}{4}$



Consideramos ahora $z = 1.$ La curva de nivel correspondiente es,

$$C_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1\right\}$$

Obtenemos una hipérbola horizontal con centro $(0,0)$ y semiejes $a = 4$ y $b = 3$. Observar que las rectas anteriores son las asíntotas de dicha hipérbola.

Consideramos ahora $z = -1.$ La curva de nivel correspondiente es,

$$C_{-1} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1\right\}$$

Obtenemos una hipérbola vertical con centro $(0,0)$ y semiejes $a = 3$ y $b = 4$.

(ii) Analizaremos las curvas de nivel $z = k \in \mathbb{R}.$ constante.

$$C_k = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : k = \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} \right\}$$

–Si $k = 0$, este caso ha sido estudiado en el apartado anterior.

–Si $k < 0$ tendremos hipérbolas verticales centradas en el $(0,0)$ y semiejes $a = 3\sqrt{-k}$ y $b = 4\sqrt{-k}$, ya que

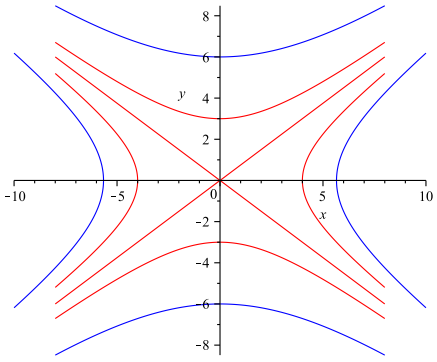
$$\frac{y^2}{\left(3\sqrt{-k}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(4\sqrt{-k}\right)^2} = 1.$$

Como ejemplo hemos estudiado el caso $z = -1$.

–Si $k > 0$ tendremos hipérbolas horizontales centradas en el $(0,0)$ y semiejes $a = 4\sqrt{k}$ y $b = 3\sqrt{k}$, ya que

$$\frac{x^2}{\left(4\sqrt{k}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(3\sqrt{k}\right)^2} = 1.$$

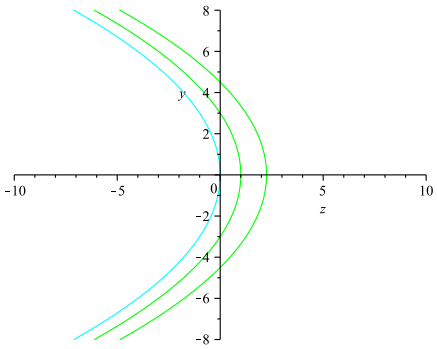
Como ejemplo hemos estudiado el caso $z = 1$.



(iii) Las curvas de nivel $x = h \in \mathbb{R}$ constante son

$$C_h = \left\{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 : z - \frac{h^2}{16} = -\frac{y^2}{9} \right\}$$

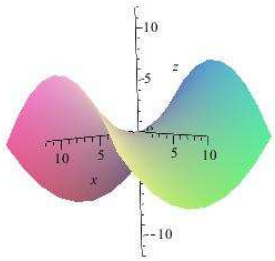
–Para toda $h \in \mathbb{R}$, obtenemos parábolas invertidas, con vértice en el $\left(0, \frac{h^2}{16}\right)$. Para el caso particular $x = 0$ el vértice será el $(0,0)$.



(*iii*)

(iv) Representar la superficie e identificarla.

La superficie en cuestión es un paraboloide hiperbólico.



Problema 4. Calcular los siguientes límites:

$$(i)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x} \qquad (ii)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)\cosh(x^2)}{2x} \qquad (iii)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Solución:

$$(i)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{3+x}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{3}\right)}{x\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{3}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{3}\right)}=\boxed{\frac{1}{2\sqrt{3}}.}$$

Para calcular el límite anterior hemos multiplicado y dividido por el conjugado del numerador.

$$(ii)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)\cosh(x^2)}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x\cosh(x^2)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cosh(x^2)}{2}=\boxed{\frac{1}{2}.}$$

Para calcular el límite anterior hemos utilizado el infinitésimo equivalente $\boxed{\operatorname{sen}(x)\sim x \text{ cuando } x\to 0}$.

$$(iii)\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{x}}=[0^0]=e^{\lim_{x\to+\infty}\ln\left[\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{x}}\right]}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}$$

$$e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\ln(x)-\ln(x^2+1)\right)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}-\frac{\ln(x^2+1)}{x}\right)}=\boxed{e^0=1.}$$

Para calcular el límite anterior hemos utilizado la escala de infinitos.

© Fonaments Matemàtics, E. Construcció. etseccpb, 2010-11