FONAMENTS MATEMÀTICS

Grau en Enginyeria de la Construcció, Curs 2010-2011

INTEGRAL DE RIEMANN PER A FUNCIONS REALS

Problema 1 *Calculeu una primitiva per a les integrals indefinides següents, directament o mitjançant un canvi de variable:*

(i) $\int (3x+1)^2 dx$ (ii) $\int \frac{dx}{x \ln x}$ (iii) $\int x\sqrt{x^2+1}dx$

(iv) $\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ (v) $\int \frac{x+1}{x^2-1}dx$ (vi) $\int \frac{x^3-1}{x-1}dx$

(vii) $\int \sin x \cos x dx$ $(viii)$ $\int \frac{dx}{(x-1)^2+2}$ (ix) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$

(x) $\int \frac{\ln x}{x}dx$ (xi) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ (xii) $\int e^{2\ln x}dx$

$(xiii)$ $\int \frac{dx}{4+x^2}$ (xiv) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ (xv) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}dx$

Problema 2 *Donades les integrals indefinides següents, calculeu una primitiva pel mètode d'integració per parts:*

(i) $\int \ln x dx$ (ii) $\int \arctan x dx$ (iii) $\int x \sin x dx$

(iv) $\int x^2 e^x dx$ (v) $\int \arcsin x dx$ (vi) $\int e^x \cos x dx$

(vii) $\int x^2 \ln x dx$ $(viii)$ $\int \ln^2 x dx$ (ix) $\int x^2 \cos x dx$

(x) $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (xi) $\int \cos(\ln x)dx$ (xii) $\int (x^2-1)e^{2x}dx$

Problema 3 *Calculeu les integrals indefinides trigonomètriques següents:*

(i) $\int \sin^2 x dx$ (ii) $\int \sin^3 x dx$ (iii) $\int \cos^4 x dx$

(iv) $\int \sin^2 t \cos^2 t dt$ (v) $\int \sin^3 t \cos^2 t dt$ (vi) $\int \sin t \cos^3 t dt$

(vii) $\int \sin^5 x \cos x dx$ $(viii)$ $\int \tan x dx$ (ix) $\int \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right)dx$

Problema 4 *Calculeu les integrals indefinides irracionals següents:*

(i) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$ (iii) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x-4}}$

(iv) $\displaystyle\int x\sqrt{9-x^2}dx$ (v) $\displaystyle\int x\sqrt{(1-x^2)^3}dx$ (vi) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}dx$

Problema 5 *Calculeu, per distints mètodes, les integrals indefinides següents:*

(i) $\displaystyle\int e^x cos(e^x)dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{\ln^3 x}{x}dx$ (iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

(iv) $\displaystyle\int \sin(2x)\cos^3(2x)dx$ (v) $\displaystyle\int \tan^2 xdx$ (vi) $\displaystyle\int 3^x e^x dx$

(vii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}$ $(viii)$ $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$ (ix) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$

(x) $\displaystyle\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$ (xi) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+2}dx$ (xii) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$(xiii)$ $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx$ (xiv) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$ (xv) $\displaystyle\int \frac{x}{e^x}dx$

(xvi) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ $(xvii)$ $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx$ $(xviii)$ $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$

(xix) $\displaystyle\int \cos^2(\ln x)dx$ (xx) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$ (xxi) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+25x^6}dx$

Problema 6 *Sigui $x_0 \in [a,b]$ i sigui $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida en l'interval $[a,b]$ per*

$$f(x)=\begin{cases} 1 & si \;\; x=x_0 \\ 0 & si \;\; x\neq x_0. \end{cases}$$

Demostreu que f és $\mathcal{R}$-integrable en $[a,b]$ i que $\displaystyle\int_a^b f dx = 0$.

Problema 7 *Suposem que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és una funció contínua i $\mathcal{R}$-integrable en $[a,b]$ i definim $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ per*

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & si \;\; x\neq x_0 \\ \\ \alpha & si \;\; x=x_0,\ \alpha\neq f(x_0). \end{cases}$$

Demostreu que g és $\mathcal{R}$-integrable en $[a,b]$ i que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

Problema 8 *La funció* **signe de** x *és una funció definida per a tot* $x \in \mathbb{R}$ *per:*

$$sign(x) = \begin{cases} 1 & si\ x > 0, \\ 0 & si\ x = 0, \\ -1 & si\ x < 0. \end{cases}$$

És $y = sing(x)$ $\mathcal{R}$*-integrable? En cas afirmatiu, trobeu la seva integral definida en l'interval* $[-1, x]$ *amb* $x \in [-1, 1]$.

Problema 9 *Donada la funció de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$ *definida per:*

$$\Phi(x) = \begin{cases} \sin x & si\ x \in [0, \pi), \\ 5 & si\ x = \pi, \\ \cos x & si\ x \in (\pi, 2\pi), \\ 0 & si\ x = 2\pi. \end{cases}$$

És $\mathcal{R}$*-integrable en* $[0, 2\pi]$*? En cas afirmatiu, trobeu la seva integral definida en aquest interval.*

Problema 10 *Sigui la funció* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida per:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & si\ x\ \in (0, 1] \\ 1 & si\ x = 0. \end{cases}$$

Verifiqueu si f *és* $\mathcal{R}$*-integrable en* $[0, 1]$.

Problema 11 *Sigui* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *contínua i definim* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *per:*

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x} \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)dt & si\ x \neq 0, \\ f(0) & si\ x = 0. \end{cases}$$

Demostreu que es verifiquen les afirmacions següents:

(i) F *és contínua en* $\mathbb{R}$.

(ii) Si existeix $f'(0)$*, aleshores existeix F'(0).*

(iii) $F \in C^{(1)}$ *en* $\mathbb{R} - \{0\}$. *(*$C^{(1)}$*: derivable amb derivada contínua.)*

Problema 12 *Sigui* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funció contínua en* $[-1, 1]$. *Demostreu que es verifica la igualtat següent:*

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

Problema 13 *Essent $a \in \mathbb{R}$ i $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ demostreu que:*

(i) Si f és una funció parella, aleshores:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

(ii) Si f és una funció imparella, aleshores:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Problema 14 *Proveu que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una funció imparella es verifica:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \sin x dx = 0.$$

Problema 15 *Calculeu les derivades de les funcions següents de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:*

(i) $\displaystyle\int_1^x \frac{1+t^4}{t^4}dt$ (ii) $\displaystyle\int_z^1 \frac{3t-2}{t+1}dt$ (iii) $\displaystyle\int_x^3 \arctan t dt$

(iv) $\displaystyle\int_0^t \frac{\sin u}{\cos^2 u}du$ (v) $\displaystyle\int_x^2 \frac{dy}{y^3+1}$ (vi) $\displaystyle\int_{0.5}^{\sin t} \arcsin u du$

(vii) $\displaystyle\int_1^{e^t} \frac{\ln x}{x}dx$ $(viii)$ $\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} t^2 \cos t dt$ (ix) $\displaystyle\int_{-\ln t}^{\ln t} (x^2-1)e^x dx$

(x) $\displaystyle\int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t}dt$ (xi) $\displaystyle\int_0^{e^x} \frac{dt}{1+t^2}$ (xii) $\displaystyle\int_0^{\cos^2 x} e^{t^2}dt$

$(xiii)$ $\displaystyle\int_0^{\sin x} e^{(t^2-2t+1)}dt$ (xiv) $\displaystyle\int_1^{x^3} \frac{\ln(1+t)}{t}dt$ (xv) $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}dt$

Problema 16 *Calculeu els límits següents:*

$$(i)\ \lim_{x\to 0}\left(x\int_0^x e^{t^2}dt\right)\left(\int_0^x e^{t^2}\sin t dt\right)^{-1} \quad (ii)\ \lim_{x\to 0}\left(\int_0^x \sin t dt\right)\left(x\int_0^x e^t dt\right)^{-1}$$

Problema 17 *Sigui $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ contínua, tal que $g(1) = 5$ i $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx = 2$. Sigui $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x (x-t)^2 g(t)dt$.*

(i) Proveu que f és derivable en $\mathbb{R}^+$ i trobar la seva derivada.

(ii) Calculeu $f''(1)$ i $f'''(1)$.

Problema 18 *Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable amb $f' > 0$ i $f(0) = 0$. Es defineix la funció $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per*

$$g(x) = \int_0^{x^2+3x+3} f(t)dt.$$

(i) Proveu que g és 2-vegades derivable i calcular g''.
(ii) Trobeu els extrems relatius de la funció g.

Problema 19 *Calculeu les àrees de les regions planes següents:*

(i) Regió compresa entre les paràboles $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ i la recta $y = 2x$.

(ii) Regió compresa entre les corbes $y = \sin x$ i $y = \sin(2x)$, des de l'origen fins al primer punt de tall.

(iii) $A = \{(x, y) : x^2 \leq 2y \, i \, x^2 + y^2 \leq 8\}$.

(iv) Regió compresa entre l'arc de sinusoide $y = \sin x$ i les rectes $x = 0$, $x = \pi$ i $y = 1/2$.

(v) Regió compresa entre les circumferències $x^2 + y^2 = 9$ i $(x - 3)^2 + y^2 = 9$.

(vi) Regió limitada per les corbes $y = e^x$, $x = 1 - y^2$ i l'eix OX.

(vii) Regió limitada per les paràboles $x = -y^2 + 2y$, $x = y^2 - 2y + 2$ i l'eix OX.

(viii) Regió limitada per les paràboles $x = -y^2 + 2y$, $x = y^2 - 2y + 2$ i les rectes $y + x = 0$, $x - y = 2$.

(ix) Regió limitada per les corbes $y = \frac{1}{(x-1)^2+1}$, $y = \frac{1-x}{2-x}$, $y = 0$ i $x = 2$.

(x) Regió limitada per les corbes $y = |x - 1|$ i $y = |x^2 - 1|$ en l'interval $[0, 2]$.

Problema 20 *Calculeu la longitud de les corbes planes següents:*

(i) Arc de la paràbola $y = \sqrt{x + 1}$ des de $x = 0$ fins a $x = 2$.

(ii) Arc de l'astroide $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ des de $x = 0$ fins a $x = 1$.

(iii) Arc de la paràbola semicúbica $y = x^{3/2}$ entre $x = 0$ i $x = 1$.

(iv) Corba tancada en el primer quadrant, formada per les paràboles $x = \frac{y^2}{2}$, $y = \frac{x^2}{2}$ i el cercle $x^2 + y^2 = 3$.

(v) Tros de la corba $y = \ln(\cos x)$ des de $x = \frac{\pi}{6}$ fins a $x = \frac{\pi}{4}$.

(vi) Arc de la cicloide $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ per a $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

(vii) Arc descrit per $x = a\cos t + at\sin t$, $y = a\sin t - at\cos t$ per a $0 \leq t \leq \pi/2$.

Problema 21 *Considereu la regió plana en el primer quadrant compresa entre la recta $2x + 3y = 6$ i l'el.lipse $4x^2 + 9y^2 = 36$.*

(i) Calculeu l'àrea d'aquesta regió.

(ii) Calculeu el volum generat en girar entorn de l'eix OY la regió plana anterior.

Problema 22 *En l'espai* $\mathbb{R}^3$*, es genera una banya degut al moviment del centre d'un cercle definit com seguidament s'indica: El pla del cercle és perpendicular a l'eix OX, el centre del cercle jeu en el pla XY, i el seu diàmetre, en el pla XY, és el segment rectilini delimitat per les corbes* $2y = \sqrt{x}$ *i* $y = \sqrt{x}$*.*

Trobeu el volum de la banya si el centre d'aquest cercle es mou des de $x = 0$ *fins a* $x = 4$*.*

Problema 23 *Sea* $f : [-3, 6] \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} -(x^2 + 4x + 3) & -3 \leq x < 0, \\ 2x - 3 & 0 \leq x < 2, \\ e^{x-2} & 2 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

(i) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f*.*

(ii) Calcular los extremos absolutos de f *en* $[-3, 6]$*.*

(iii) Dar la expresión de $F(x) = \int_{-3}^{x} f(t)\, dt$*.*

(iv) Calcular el área limitada por la gráfica de $f(x)$ *desde* $x = 3/2$ *hasta* $x = 6$*.*

Problema 24 *La sección de un sólido paralela a la base a una altura* z *de la misma, es un anillo circular de radio interno* z^2 *y radio externo* $\sqrt{z}$*. Sabiendo que el sólido tiene una altura uno, hallar el volumen del mismo.*

Problema 25 *Se consideran las funciones* $f(x) = \sin(x)$ *y* $g(x) = x^2$*. Se define*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in [0, \pi], \\ g(x) & si \quad x \in (\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

(i) Hallar la función integral de $h(x)$*,* $H(x) = \int_{0}^{x} h(t)\, dt$*.*

(ii) Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la función $f(x)$ *entre* 0 *y* π *alrededor del eje OX.*

(iii) Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la función $f(x)$ *entre* 0 *y* π *alrededor del eje OY.*

Problema 26 *Sea* $f : [-1, 2\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \leq x < 0, \\ \sin x & 0 \leq x < \pi, \\ (x - \pi)^3 & \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

(i) *Estudiar la continuidad y derivabilidad de* f *en* $[-1, 2\pi]$.

(ii) *Calcular el área encerrada bajo la gráfica de* f *desde* $x = -1$ *hasta* $x = 2\pi$.

(iii) *Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la función* $f(x)$ *entre* -1 *y* π *alrededor del eje OX.*

Problema 27 *Sea* $f : [-1, 2] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & si\ x \in [-1, 0), \\ e^x & si\ x \in [0, 1], \\ e \cdot x & si\ x \in (1, 2]. \end{cases}$$

(i) *Hallar la función integral de* $f(x)$, $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\, dt$.

(ii) *Hallar el área de la región limitada por la gráfica de* f *y el eje* $y = 0$.

(iii) *Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la gráfica de la función* $f(x)$ *alrededor del eje OX.*

(iv) *Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la gráfica de la función* $f(x)$ *entre* $x = 0$ *y* $x = 1$ *alrededor del eje OY.*

Problema 28 *Sea* $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, *definida por* $f(x) = \sin(x)$.

(i) *Hallar el área limitada por la gráfica de* f *y el eje OX.*

(ii) *Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la gráfica de la función* $f(x)$ *alrededor del eje OX.*

(iii) *Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la gráfica de la función* $f(x)$ *alrededor del eje OY.*

(iv) *Un sólido tiene como base la región limitada por* $\sin(x)$ *desde* $x = 0$ *hasta* $x = \pi$ *y el eje OX, y sus secciones perpendiculares al eje OX son rectángulos de altura* $\cos^2(x)$. *Hallar el volumen del sólido.*

Problema 29 *Sea* $f : [0, \pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi^2}x^2 + \dfrac{1}{\pi}x & si\ x \in [0, \pi/2), \\ \sin(x) & si\ x \in [\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

(i) *Hallar la función integral de* $f(x)$, $F(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\, dt$.

(ii) *Hallar el área de la región limitada por la gráfica de* f *y el eje* $y = 0$.

(iii) *Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por la gráfica de* f *y el eje* $y = 0$ *alrededor del eje OX.*

(iv) Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por la gráfica de f y el eje $y = 0$ alrededor del eje OY.

Problema 30 *Sea $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |\, x^2 - 1\,|$.*

(i) Hallar la función integral de $f(x)$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.

(ii) Hallar el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje $y = 0$.

(iii) Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por la gráfica de f y el eje $y = 0$ alrededor del eje OX.

(iv) Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por la gráfica de f y el eje $y = 0$ alrededor del eje OY.

Problema 31 *Sea $f : [-1, 4] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & -1 \leq x < 0, \\ \cos(x) & 0 \leq x < \pi, \\ -2 & \pi \leq x \leq 4. \end{cases}$$

(i) Hallar la función integral de $f(x)$, $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^x f(t)\, dt$.

(ii) Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad de F.

(iii) Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por la gráfica de f desde $x = 0$ hasta $x = \pi$ y el eje $y = 0$ alrededor del eje OX.

(iv) Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por la gráfica de f desde $x = 0$ hasta $x = \pi/2$ y el eje $y = 0$ alrededor del eje OY.

Problema 32 *Sea $f : [0, \sqrt{2}] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & 0 \leq x < \sqrt{2}/2, \\ x & \sqrt{2}/2 \leq x < 1, \\ \sqrt{2 - x^2} & 1 \leq x \leq \sqrt{2}. \end{cases}$$

(i) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de f y las rectas $x = 0$, $x = \sqrt{2}$ e $y = 0$.

(ii) Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por la gráfica de f y las rectas $x = 0$, $x = \sqrt{2}$ e $y = 0$ alrededor del eje OX.

(iii) Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por la gráfica de f y las rectas $x = 0$, $x = \sqrt{2}$ e $y = 0$ alrededor del eje OY.

Problema 33 *Sea* $f(x) = 1 + e^x - x$, $x \in \mathbb{R}$.

(i) Estudiar la continuidad de f *en* $\mathbb{R}$.

(ii) Calcular los extremos de f *en* $\mathbb{R}$, *y clasificarlos.*

(iii) Estudiar el número de raíces de la ecuación $x = 1 + e^x$.

(iv) Calcular la integral indefinida o primitiva de f.

Problema 34 *Calcular el volumen generado al girar alrededor del eje* x *la curva*

$$y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}})$$

entre $x = 0$ *y* $x = b$.

Problema 35 *Sea* $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2, x \leq 3 - 2y^2\}$.

(i) Calcular el área de R.

(ii) Hallar el volumen del sólido de base R *cuyas secciones transversales, perpendiculares al eje* x, *son cuadrados.*

Problema 36 *Sea* $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \sin x,\ y \geq \cos x,\ y \geq 0,\ x \in [0, \pi]\}$.

(i) Calcular el área de R.

(ii) Hallar el volumen del sólido de revolución obtenido al girar R *entorno del eje* OX.

Problema 37 *Sea* $F : [-1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ *siendo*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si\ -1 \leq x < 0, \\ \cosh(x) & si\ 0 \leq x < 1, \\ 1 & si\ 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

(i) Obtener una expresión explícita de $F(x)$.

(ii) Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de la función $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida como* $G(x, y) = (F(x), y)$.

(iii) Calcular, cuando sea posible, $dG(x, y)$.

Problema 38 *Calculeu, amb integració reiterada, les integrals dobles següents sobre el rectangle R indicat:*

$$(i)\quad \int_R xy(x+y)dxdy \qquad on\ \ R=[0,1]\times[0,1]$$
$$(ii)\quad \int_R (x+y-3xy^2)dxdy \qquad on\ \ R=[0,1]\times[1,3]$$
$$(iii)\quad \int_R \sin^2 x \sin^2 y dxdy \qquad on\ \ R=[0,\pi]\times[0,\pi]$$
$$(iv)\quad \int_R (x\sin y - ye^x)dxdy \qquad on\ \ R=[-1,1]\times[0,\pi/2]$$

Problema 39 *Calculeu el valor de la integral* $\int_R f(x,y)dxdy$ *en els casos següents.*

(i) $f(x,y)=|x-y|$ *i* $R=[0,1]\times[0,1]$.

(ii) $f(x,y)=\begin{cases} x+y & si\ x^2\le y\le 2x^2 \\ 0 & en\ cas\ contrari \end{cases}$ *i* $R=[0,1]\times[0,1]$.

(iii) $f(x,y)=\begin{cases} 1 & si\ x=y \\ 0 & si\ x\neq y \end{cases}$ *i* $R=[0,1]\times[0,1]$.

(iv) $f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2 & si\ x^2+y^2\le 1 \\ 0 & si\ x^2+y^2>1 \end{cases}$ *i* $R=[-1,1]\times[-1,1]$.

Problema 40 *Calculeu el valor de les integrals dobles següents i representar, en cada cas, la regió d' integració:*

(i) $I_1=\int_A x\cos(x+y)dxdy$ *on A és el triangle de vèrtexs* $(0,0)$, $(\pi,0)$, (π,π).

(ii) $I_2=\int_A e^{x+y}dxdy$ *on* $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|\le 1\}$.

(iii) $I_3=\int_A (x^2+y^2)dxdy$ *on* $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2\le y\le x\}$.

(iv) $I_4=\int_A 2xydxdy$ *on* $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le x, x+y\le 2\}$.

Problema 41 *Calculeu el valor de les integrals triples següents:*

(*i*) $I_1 = \int_A xy^2z^3 dxdydz$,
essent A *el sòlid limitat per la superfície* $z = xy$ *i els plans* $y = x$, $x = 1$, $z = 0$.

(*ii*) $I_2 = \int_A xyz dxdydz$,
essent $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

(*iii*) $I_3 = \int_A \sqrt{x^2 + y^2} dxdydz$,
essent A *el sòlid format per la part superior del con* $z^2 = x^2 + y^2$ *i el pla* $z = 1$.

(*iv*) $I_4 = \int_A dxdydz$,
essent A *el sòlid en el primer octant entre* $z = x^2 + y^2$ *i* $x + y = 1$.

Problema 42 *Una piràmide està limitada pels tres plans de coordenades i el pla* $x + 2y + 3z = 6$. *Representeu el sòlid i calculeu-ne el volum.*

Problema 43 *Calculeu el volum del sòlid limitat per la superfície* $z = x^2 - y^2$ *i els plans* $z = 0$, $x = 1$ *i* $x = 3$.

Problema 44 *Calculeu el volum del sòlid comprès entre les superfícies*

$$z = xy,\ z = 0,\ x^2 + y^2 = 1 \quad i \quad (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$