# FONAMENTS MATEMÀTICS

Grau en Enginyeria de la Construcció, Curs 2010-2011

CÀLCUL DIFERENCIAL DE FUNCIONS D'UNA VARIABLE

**Problema 1** *Estudieu la derivabilitat i calculeu la derivada de les funcions de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$ *següents:*

$(i)$ $f(x) = |x| + x|x|$

$(ii)$ $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$

$(iii)$ $f(x) = \sin(\cos^2 x) + \cos(\sin^2 x)$

$(iv)$ $f(x) = (x-1)(x-2)\sqrt{x+3}\sqrt[3]{x-4}$

$(v)$ $f(x) = |\cos x|$

$(vi)$ $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

$(vii)$ $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$

$(viii)$ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$

$(ix)$ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$(x)$ $f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ |x| & x \leq 0 \end{cases}$

$(xi)$ $f(x) = \begin{cases} 1 - x & x \leq 0 \\ e^{-x} & x > 0 \end{cases}$

**Problema 2** *Resoleu el següent:*

*(i) Trobeu els punts en els quals les tangents a la corba* $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ *són paral.leles a l'eix d'abcisses.*

*(ii) En quin punt* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *de la corba* $y^2 = 2x^3$ *la tangent és perpendicular a la recta* $4x - 3y + 2 = 0$*?*

*(iii) Trobeu tots els valors de* $x$ *pels quals la tangent a la corba* $y = x - \dfrac{1}{x}$ *és paral.lela a la recta* $2x - y = 5$ *.*

*(iv) Trobeu tots els valors de* $x$ *pels quals la tangent a la corba* $y = (x+2)^2$ *passa per l'origen.*

*(v) Sabent que* $y(3) = -1$ *i* $y'(3) = 5$*, trobeu l'equació de la recta tangent a la corba* $y = y(x)$ *en* $x = 3$*.*

*(vi) Trobeu l'equació de la paràbola* $y = x^2 + bx + c$ $(b, c \in \mathbb{R})$ *que és tangent a la recta* $y = x$ *en el punt* $(1, 1)$*.*

*(vii) Trobeu l'equació de la tangent a la corba* $y = \arcsin\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$ *en el punt*

*d'intersecció amb l'eix OX.*

**Problema 3** *Essent $f$ una funció de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ derivable a $\mathbb{R}$, calculeu les derivades primera i segona de $g$:*

$(i)$ $g(x) = f(x^2)$

$(ii)$ $g(x) = f(x)e^{f(x)}$

$(iii)$ $g(x) = f(\ln(f(x)))$

$(iv)$ $g(x) = \tan((f(x))^2)$

$(v)$ $g(x) = \dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}$

$(vi)$ $g(x) = \dfrac{e^{f(x)}+1}{f(4x)}$

**Problema 4** *Siguin $g(t) = f(\sin t) + e^{f(t)+1}$ i $h(t) = \ln(2 + f(t)) + f(\ln(1 + t))$ on $f(t)$ és una funció real derivable tal que $f(0) = -1$ i $f'(0) = 1$. Proveu que $g'(0) = h'(0)$.*

**Problema 5** *Demostreu que un error relatiu d'un 1% en determinar la longitud del radi dóna lloc a un error relatiu aproximat d'un 2% en calcular l'àrea del cercle i la superfície de l'esfera.*

**Problema 6** *Quant augmenta aproximadament el volum d'una esfera si el seu radi $R = 15$ cms'allarga 2 mm?*

**Problema 7** *Demostreu, basant-vos en la llei d'Ohm, $I = E/R$, que una petita variació en la intensitat del corrent, deguda a una petita variació de la resistència, pot calcular-se de manera aproximada per $\Delta I \approx -I\Delta R/R$.*

**Problema 8** *El costat d'un quadrat mesura 10 m amb un error màxim de $\pm 0.1$ m Useu diferencials per estimar l'error, absolut i relatiu, de l'àrea calculada.*

**Problema 9** *La resistència elèctrica $R$ d'un filferro ve donada per $R = k/r^2$, on $k$ és constant i $r$ és el radi del filferro. Suposant que $r$ té un error màxim del 5%, useu diferencials per estimar el percentatge d'error de $R$.*

**Problema 10** *Demostreu que en la paràbola $y = Ax^2 + Bx + C$ la corda que uneix els punts per als quals $x = a$ i $x = b$ és paral.lela a la tangent en el punt per al qual $x = \dfrac{a+b}{2}$.*

**Problema 11** *La funció* $f(x) = \sqrt[n]{(x-2)^2}$ *pren el mateix valor en els extrems de l'interval [0,4]. Podem, per aquesta funció, aplicar el teorema de Rolle?*

**Problema 12** *Malgrat que la funció* $f(x) = |\sin x|$ *verifica que* $f(-\pi/2) = f(\pi/2) = 1$ *i és contínua en* $[-\pi/2, \pi/2]$*, no existeix cap* $a \in (-\pi/2, \pi/2)$ *tal que* $f'(a) = 0$*. Contradiu aquest fet el teorema de Rolle?*

**Problema 13** *Es defineix la funció* $f$ *de la manera següent:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & x > 1 \end{cases}$$

*(i) Dibuixeu la gràfica de* $f(x)$ *en l'interval [0,2].*
*(ii) Demostreu que* $f$ *satisfà les condicions del teorema del valor mitjà en l'interval [0,2] i determineu tots els valors mitjans possibles donats pel teorema.*

**Problema 14** *Sigui* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua en [a,b] i derivable en (a,b). Si* $f(x) > 0$ $\forall x \in [a,b]$ *demostreu que existeix* $\alpha \in (a,b)$ *tal que compleix:*

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}}$$

**Problema 15** *Demostreu que si* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *és contínua en* $[a,b]$ *i derivable en* $(a,b)$ *verificant que* $\forall x \in (a,b), |f'(x)| \leq 1$*, aleshores :*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2| \quad , \quad \forall x_1, x_2 \in (a,b).$$

**Problema 16** *Aplicant el teorema de Rolle, demostreu que l'equació cúbica* $x^3 - 3x + b = 0$ *no pot tenir més d'una arrel en l'interval [-1,1], sigui quin sigui el valor de* $b$*.*

**Problema 17** *Demostreu que l'equació funcional* $x^2 = x\sin x + \cos x$ *es satisfà exactament per a dos valors de* $x$*.*

**Problema 18** *Ajudant-vos gràficament, proveu que l'equació* $e^{x-1} - \dfrac{1}{x+1} = 0$ *té una única arrel real i trobeu-la aproximadament.*

**Problema 19** *Calculeu els límits següents aplicant, si és possible, la regla de l'Hôpital:*

$(i)$ $\lim_{x\to 1^+} \ln x \ln(x-1)$ $(ii)$ $\lim_{x\to 0^+} x^x$

$(iii)$ $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ $(iv)$ $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x}$

$(v)$ $\lim_{x\to 0^+} (\cot x - \ln x)$ $(vi)$ $\lim_{x\to \pi/2} (\tan x)^{\cos x}$

$(vii)$ $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$ $(viii)$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^2}$

$(ix)$ $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1-\ln x}{e^{1/x}}$ $(x)$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$

$(xi)$ $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}$ $(xii)$ $\lim_{x\to 0^+} (x)^{\frac{1}{\ln x}}$

$(xiii)$ $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln x}$ $(xiv)$ $\lim_{x\to+\infty} (x)^{\frac{1}{x}}$

**Problema 20** *Calculeu una aproximació polinòmica de quart ordre en un entorn del punt $x = 0$ per a cada una de les funcions següents:*

$(i)$ $f(x) = e^{-x^2}$ $(ii)$ $f(x) = \ln(x^2+1)$

$(iii)$ $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $(iv)$ $f(x) = \sin(x^2)$

$(v)$ $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ $(vi)$ $f(x) = \dfrac{3}{(1-x)(1+2x)}$

**Problema 21** *Calcular el número de ceros de la ecuación $\text{arctang}(x) = \dfrac{4}{5}x$, dando un intervalo donde se localicen.*

**Problema 22** *¿En cuántos puntos se intersectan las curvas $y = \ln(x)$ e $y = \dfrac{1}{9}x^2$? ¿Por qué?*

**Problema 23** *¿En cuántos puntos se intersectan las curvas $y = e^x$ e $y = 3x^2$? ¿Por qué?*

**Problema 24** *(i) Demostrar que la ecuación $x = n\ln(x)$ tiene a lo sumo dos raíces para todo $n \geq 1, x > 0$.*

*(ii) Demostrar que si $n = 4$ la ecuación tiene exactamente dos raíces.*

**Problema 25** *Demostrar que la ecuación $x = \tan x$ tiene una única raíz en el intervalo $[-\pi/4, \pi/4]$.*

**Problema 26** *(i) Demostrar que la ecuación* $x^4 - 4x - 1 = 0$ *tiene exactamente dos raíces reales y dar un intervalo al que pertenece cada una de ellas.*

*(ii) Hallar las rectas tangente y normal a la curva* $y(x) = x^4 - 4x - 1$ *en el punto* $x = -1$.

**Problema 27** *(i) Demostrar que las curvas* $y = e^{x-2}$ *e* $y = -x^2 + 4$ *se cortan exactamente en dos puntos y dar un intervalo al que pertenece cada uno de ellos.*
*(ii) Hallar las rectas tangente y normal a la curva* $y = e^{x-2} + x^2 - 4$ *en el punto* $x = 2$.

**Problema 28** *(i) Demostrar que la ecuación* $x^4 + x^3 + x^2 - 2 = 0$ *tiene exactamente dos raíces reales y dar un intervalo al que pertenece cada una de ellas.*

*(ii) Hallar las rectas tangente y normal a la curva* $y(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 2$ *en el punto* $x = 1$.

**Problema 29** *(i) Demostrar que la ecuación* $8\ln(x) - x^2 + 4 = 0$ *tiene exactamente dos raíces reales en* $(0, +\infty)$ *y dar un intervalo al que pertenece cada una de ellas.*

*(ii) Hallar las rectas tangente y normal a la curva* $y(x) = 8\ln(x) - x^2 + 4$ *en el punto* $x = 1$.

**Problema 30** *(i) Demostrar que la ecuación* $x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$ *tiene exactamente tres raíces reales y dar un intervalo al que pertenece cada una de ellas.*

*(ii) Hallar las rectas tangente y normal a la curva* $y(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 2$ *en el punto* $x = 0$.

**Problema 31** *Quina és la tangent a la corba* $y = 2x\ln x + x^3/6 - 3x^2/2 - 2x$ *que té el pendent més petit a [1,5]? I la tangent que té el pendent més gran a [1,5]?*

**Problema 32** *Un recipient rectangular de base quadrada ha de tenir un volum de* $1000cm^3$. *El preu del* $cm^2$ *de les bases superior i inferior és el doble que el dels costats. Trobeu les dimensions del recipient més econòmic.*

**Problema 33** *Donat* $R > 0$, *demostreu que entre tots els nombres positius* $x$ *i* $y$ *tals que* $x^2 + y^2 = R$ *la suma* $x + y$ *és màxima quan* $x = y$.

**Problema 34** *Un granger vol tancar un terreny de pastura rectangular d'àrea* $A$ *adjacent a una paret de pedra. Quines dimensions exigeixen la mínima quantitat de filat?*

**Problema 35** *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} |x+2| - 2 & -4 \leq x \leq 0, \\ \text{máx}\{0, -x^2 + 4x - 3\} & 0 < x \leq 4. \end{cases}$$

*Calcular los extremos absolutos de* $f$ *en* $[-4, 4]$.

**Problema 36** *Sean* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *y* $f : [-2, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a & -2 \leq x < 2, \\ cx^3 + bx + 1 & 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

*(i) Encontrar los valores de* $a, b$ *y* $c$ *que hacen que* $f$ *sea continua y dos veces derivable en* $(-2, 4)$.
*(ii) Estudiar los extremos absolutos de* $f$ *en* $[-2, 4]$ *para los valores de* $a = -7/3$, $b = 2$ *y* $c = 1/6$.

**Problema 37** *Sea* $f : [-4, 4] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} 3 - (x+3)^2 & -4 \leq x < -2, \\ |x| & -2 \leq x \leq 1, \\ |x-2| & 1 < x \leq 4, \end{cases}$$

*(i) Estudiar la continuidad de* $f$ *en* $[-4, 4]$.
*(ii) Estudiar los extremos relativos y absolutos de* $f$ *en* $[-4, 4]$ *y hallar los valores de máximo y mínimo absoluto. ¿El teorema de Weiestrass da alguna información o ayuda en este estudio?*

**Problema 38** *Sea* $f : [-4, 5] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} -2(x+3)^2 + 4 & -4 \leq x < -2, \\ |x| & -2 \leq x < 2, \\ 2 & 2 \leq x < 4, \\ (x-4)^2 + 2 & 4 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

*(i) Estudiar la continuidad de* $f$ *en* $[-4, 5]$.
*(ii) Estudiar los extremos relativos y absolutos de* $f$ *en* $[-4, 5]$ *y hallar los valores de máximo y mínimo absoluto. ¿El teorema de Weiestrass da alguna información o ayuda en este estudio? (Justificar la respuesta).*

**Problema 39** *Sea* $f : [-3, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^3 & -3 \leq x < -1, \\ -x^2 + 2 & -1 \leq x \leq 1, \\ e^{x-1} & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

*(i) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f$.*
*(ii) Estudiar los extremos relativos y absolutos de $f$ en $[-3, 2]$.*

**Problema 40** *Sea $f : [-1, 2] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & si\ x \in [-1, 0) \\ e^x & si\ x \in [0, 1] \\ e \cdot x & si\ x \in (1, 2] \end{cases}$$

*(i) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f$ en $[-1, 2]$.*
*(ii) Estudiar los extremos absolutos de $f$ en $[-1, 2]$ y hallar los valores de máximo y mínimo absoluto.*

**Problema 41** *Sea $f : [-4, 4] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} -(x+3)^2 + 5 & si\ x \in [-4, -1) \\ -\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) & si\ x \in [-1, 2) \\ 2x - 4 & si\ x \in [2, 4] \end{cases}$$

*(i) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f$ en $[-4, 4]$.*
*(ii) Estudiar los extremos absolutos de $f$ en $[-4, 4]$ y hallar los valores de máximo y mínimo absoluto.*

**Problema 42** *Sea $f : [-1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + (1 - x^2)^2 & -1 \leq x < 1, \\ |x^2 - 2| & 1 \leq x < 2, \\ \dfrac{x^3}{4} + x - 2 & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

*(i) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f$.*
*(ii) Estudiar los extremos relativos y absolutos de $f$ en $[-1, 3]$.*

**Problema 43** *Sea $f : [-2\pi, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) - 1 & -2\pi \leq x < 0, \\ x^2 & 0 \leq x < 1, \\ 2x - 1 & 1 \leq x < 2. \\ 4 - (3 - x)^2 & 2 \leq x < 5. \end{cases}$$

*(i) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $f$ en su dominión de definicón.*
*(ii) Estudiar los extremos relativos y absolutos de $f$ en $[-2\pi, 5]$.*

**Problema 44** *Sea* $f : [-2, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} |x+1| & -2 \leq x < 1, \\ -\dfrac{1}{2}(x-2)^2 + \dfrac{5}{2} & 1 \leq x < 3, \\ 1 + \sin\left(\dfrac{\pi}{2}(x-2)\right) & 3 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

*(i) Estudiar la continuidad y derivabilidad de* $f$.
*(ii) Estudiar los extremos relativos y absolutos de* $f$ *en* $[-2, 5]$.

**Problema 45** *Sea* $f : [-1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & -1 \leq x < 0, \\ 2x^2 - x + 1 & 0 \leq x < 1, \\ x^3 - 8x^2 + 20x - 11 & 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

*(i) Estudiar la continuidad y derivabilidad de* $f$.

*(ii) Estudiar los extremos relativos y absolutos de* $f$ *en* $[-1, 3]$.

**Problema 46** *Sea* $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\left|x + \dfrac{3\pi}{4}\right| & -\pi \leq x < -\dfrac{3\pi}{4}, \\ \sin(x) - \cos(x) & -\dfrac{3\pi}{4} \leq x < \dfrac{3\pi}{4}, \\ \sqrt{2} + \left(x - \dfrac{3\pi}{4}\right)^2 & \dfrac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

*(i) Estudiar la continuidad y derivabilidad de* $f$.

*(ii) Estudiar los extremos relativos y absolutos de* $f$ *en* $[-\pi, \pi]$.

**Problema 47** *Sea* $f : [-3, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} -(3x+7) & si \ -3 \leq x < -2, \\ x^3 - 3x + 1 & si \ -2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

*Calcular los extremos absolutos de* $f$ *en* $[-3, 3]$.

**Problema 48** *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-1} & si\ x \leq 0 \\ \dfrac{ax+b}{x^2+2x+1} & si\ x > 0 \end{cases}$$

*(i) Hallar los valores de $a, b$ para que $f$ sea continua en $x = 0$ y tenga derivada nula en $x = 2$.*
*(ii) Estudiar la derivabilidad de $f$ en $\mathbb{R}$ para los valores de $a$ y $b$ obtenidos en el apartado anterior.*
*(iii) Hallar los extremos absolutos de $f$ en el intervalo $[1, 4]$ para los valores de $a$ y $b$ obtenidos en el apartado (i).*

**Problema 49** *Sea $f : [-1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} |x+1| & si \quad -1 \leq x \leq 0, \\ (x-1)^2 & si\ \ 0 < x \leq 1, \\ e^{x-1} - x & si\ \ 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

*(i) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f$ en $[-1, 2]$.*
*(ii) Hallar los extremos absolutos de $f$ en $[-1, 2]$.*

**Problema 50** *Se considera la función $y(x) = \dfrac{1}{x}$. Demostrar que el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta tangente a $y(x)$ en el punto $x$ es constante.*

**Problema 51** *Encontrar el triángulo isósceles de área máxima inscrito en la elipse $x^2 + 4y^2 = 1$ y cuyo eje de simetría es el eje $y$.*

**Problema 52** *Hallar la distancia de la parábola $y^2 = 2px$ al punto $(a, 0)$.*

**Problema 53** *Hallar las curvas $y = y(x)$ tales que el punto de intersección de la recta tangente a la curva en el punto $(x, y(x))$ con el eje de abcisas es igual a $\dfrac{2}{3}x$.*

**Problema 54** *Encontrar el rectángulo de área máxima inscrito en la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, con $a, b > 0$.*

**Problema 55** *Se considera un cuadrado de lado $L$. Encontrar el cuadrado de área máxima que puede circunscribirse en dicho cuadrado.*