FONAMENTS MATEMÀTICS

Grau en Enginyeria de la Construcció, Curs 2010-2011

ESTUDI DE LA CONTINUÏTAT DE LES FUNCIONS

Problema 1 *Calculeu els dominis de les funcions següents:*

(i) $f(x) = 5e^{2x^2+1} - \cos(x^2+4)$

(ii) $g(t) = 3t^2 - t + e^t - \ln t$

(iii) $h(t) = e^{1/t} - e^{2t}$

(iv) $f(x) = \cos(x^2 - \ln(x+1))$

(v) $g(x) = |x - \ln x|$

(vi) $h(a) = \ln(\ln a)$

(vii) $r(t) = \dfrac{|t|}{\sqrt{2t-1}}$

$(viii)$ $f(u) = \sqrt{\dfrac{u^3}{u^2-1}}$

(ix) $f(u) = \ln\left(\dfrac{u-1}{u+2}\right)$

(x) $s(t) = \dfrac{\sin(1/t)}{t^3-1}$

(xi) $f(x,y) = \sqrt{x-(y-1)^2-1}$

(xii) $f(x,y) = \ln(y-x^2)$

$(xiii)$ $g(u,v) = \dfrac{u+v}{\sqrt{2u-v}}$

(xiv) $r(u,v) = \dfrac{\sqrt{u^2+v^2-4}}{u^2+v^2}$

(xv) $r(t,s) = \dfrac{\ln(t^2+s^4)}{\sin(ts)}$

(xvi) $h(t,z) = \dfrac{tz}{(t+1)^2+(z-2)^2}$

Problema 2 *Calculeu la composició dels parells de funcions següents:*

(i) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{x-1}$

(ii) $h(t) = \sin(t^2-2)$, $s(t) = e^{1/t}$

(iii) $f(x,y) = \left(\dfrac{x^2-y^2}{xy}x + y\right)$, $g(x,y) = \sqrt{x-y+3}$

(iv) $r(t) = (\sin t\ ,\ \cos t\ ,\ t)$, $g(u,v,z) = u^2+v^2+z^2$

(v) $f(x,y,z) = (x+z\ ,\ y-x)$, $h(x,y) = \sin(x+y)$

Problema 3 *Essent la funció*

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2xy}$$

Trobeu

(i) $f(-1,2)$ (ii) $f(3x,y)$ (iii) $f(-x,-y)$
(iv) $f(x,y^2)$ (v) $f(1/x,1/y)$ (vi) $f(x+1,\sin y)$

Problema 4 *Trobeu el valor que prenen les funcions següents en els punts de les corbes indicades:*

(i) $f(x,y) = 1+x-y$ *sobre la paràbola* $y = x^2$.

(ii) $r(u,v) = uv$ *sobre la recta* $2u-3v = 0$.

(iii) $g(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{y^2}$ *sobre el tros de circumferència* $y = \sqrt{\pi/2 - x^2}$.

(iv) $h(x,y,z) = \dfrac{3z}{x^2+2y^2}$ *sobre el paraboloide* $z = x^2+2y^2$.

Problema 5 *Trobeu un* $x \in \mathbb{R}$ *tal que verifiqui les relacions següents:*

$$(i)\ \ln(1+x) = \ln(1-x)$$

$$(ii)\ \ln(1+x) = 1+\ln(1-x)$$

$$(iii)\ \ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}) = 1$$

Problema 6 *Sigui la funció* $f(x) = \ln(\dfrac{1+x}{1-x})$ *definida per* $x > 0$ *. Si* a *i* b *són dos nombres reals tals que* $ab \neq -1$ *, trobeu tots els* $x \in \mathbb{R}$ *tals que* $f(x) = f(a)+f(b)$.

Problema 7 *Representeu gràficament algunes corbes de nivell dels camps escalars següents i feu una gràfica aproximada de la superfície que representen:*

(i) $f(x,y) = x^2+y^2$ (ii) $h(s,t) = \sqrt{s^2+t^2}$

(iii) $z(x,y) = xy$ (iv) $f(t,z) = t^2-z^2$

(v) $g(a,b) = 9a^2+4b^2$ (vi) $w(u,v) = 2u-v$

Problema 8 *Calculeu els límits de funcions de variable real següents:*

(i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-4}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

(iii) $\lim\limits_{t\to 0} \left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)^{1/t}$

(iv) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t}$

(v) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x}$

(vi) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$

(vii) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$

$(viii)$ $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$

(ix) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$

(x) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

(xi) $\lim\limits_{t\to\infty} (\sqrt{t^2-6t+1}-t+1)$

(xii) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

$(xiii)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{1/x}$

(xiv) $\lim\limits_{t\to+\infty} (\ln(t^2-2t+1))^{1/t}$

(xv) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$

(xvi) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x\ln(1/x))^x$

$(xvii)$ $\lim\limits_{t\to\pi/2} (\sin t-1)\tan t$

$(xviii)$ $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot \arcsin(1/x)$

(xix) $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\sin x)^{\tan x}$

(xx) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\tan x)^{1/\sin x}$

(xxi) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^x}{x}\right)^{e^{-x}}$

$(xxii)$ $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

$(xxiii)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{2x}$

$(xxiv)$ $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)^{x-1}$

(xxv) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)^{1/x}$

$(xxvi)$ $\lim\limits_{t\to\pi/4} \dfrac{\sin(t-\pi/4)}{4t-\pi}$

$(xxvii)$ $\lim\limits_{t\to -1} \dfrac{e^{t+1}-1}{t^2-1}$

$(xxviii)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{x}$

$(xxix)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$

(xxx) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}$

$(xxxi)$ $\lim\limits_{t\to 0} t\cdot\sin\left(\dfrac{1}{t}\right)$

$(xxxii)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}$

$(xxxiii)$ $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sin(x^2-1)}{x+1}$

$(xxxiv)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{-x}}{\sin x}$

$(xxxv)$ $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\arctan(x-4)}{\ln(x-3)}$

$(xxxvi)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1-e^x)}{x}$

$(xxxvii)$ $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{|t|}$

$(xxxviii)$ $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{|x-1|}$

$(xxxix)$ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x^2-1|}{x^2+x-2}$

(xl) $\lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{|t|}{\ln(2t+1)}$

(xli) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{x^3-\sqrt{x}}{x^2}\ ,\ \dfrac{|x|}{e^x-1}\ ,\ \dfrac{x}{\ln(1-3x)}\right)$

$(xlii)$ $\lim\limits_{t\to-\infty} \left(\dfrac{\sin t}{t}\ ,\ \dfrac{e^t-1}{t}\ ,\ 2^{-t^2}\right)$

Problema 9 *Les següents funcions estan definides en* $\mathbb{R}-\{0\}$ *. Quin valor ha de prendre* f *en* $x=0$ *per ésser contínua en tot* $\mathbb{R}$*?*

$(i)\ f(x)=\dfrac{\sin(2x)}{x}$ $\qquad$ $(ii)\ f(x)=\dfrac{\sinh x}{x}$

$(iii)\ f(x)=x\cdot\sin(\pi/x)$ $\qquad$ $(iv)\ f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$

Problema 10 *Calculeu el valor de les constants perquè les funcions reals de variable real següents siguin contínues en tot* $\mathbb{R}$ *:*

$$(i)\ r(t)=\begin{cases}\sin t & si\ t\le 1\\ at+2 & si\ t>1\end{cases}$$

$$(ii)\ g(x)=\begin{cases}2x^2+b & si\ x\ge 0\\ \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} & si\ x<0\end{cases}$$

$$(iii)\ f(x)=\begin{cases}2^{1/x}+a & si\ x<0\\ 0 & si\ x=0\\ b^{1/x} & si\ x>0;\ b>0\end{cases}$$

Problema 11 *Estudieu la continuïtat de les funcions següents i indiqueu els tipus de discontinuïtats que es presentin:*

$(i)\ h(t)=\dfrac{\sin(t+1)}{|t^2-1|}$ $\qquad$ $(ii)\ h(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}$

$(iii)\ f(x)=\dfrac{|x|+1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\qquad$ $(iv)\ g(y)=\dfrac{e^{2y}-1}{\ln(y^2+1)}$

$$(v)\ g(x)=\begin{cases}1 & , \quad x\ge 1\\ 0 & , \quad -1<x<1\\ -1 & , \quad x\le -1\end{cases}$$

$$(vi)\ F(u)=\begin{cases}\dfrac{\sin(2u)}{u} & , \quad u>0\\ \ln|1+u| & , \quad u<0, u\neq -1\\ 1/2 & , \quad u=0\\ 0 & , \quad u=-1\end{cases}$$

$$(vii)\ h(z)=\begin{cases}\sin z & , \quad z\le 0\\ z & , \quad z>0\end{cases}$$

$$(viii)\ r(t)=\begin{cases}e^{1/(t-1)} & , \quad t<1\\ 0 & , \quad t=1\end{cases}$$

$$(ix)\ s(t)=\begin{cases}e^{1/(t-1)} & , \quad t\neq 1\\ 0 & , \quad t=1\end{cases}$$

Problema 12 *Calculeu els següents límits de funcions de variable vectorial:*

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

(ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

(iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\sin((x-1)y)}{y}$

(iv) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

(v) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^5-2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$

(vi) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln(x^2-y^2+1)}{x+y}$

(vii) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x-y}{x+y-2}$

$(viii)$ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{(x-1)^3}{x^2-2x+y^2+1}$

(ix) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{e^{x/y}-1}{x}$

(x) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln(xy+1)}{x^2+y^2}$

(xi) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$

(xii) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x^2-y^2}{e^{x+y}-1}$

$(xiii)$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(xiv) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{y^2}$

(xv) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (2+xy)^{\frac{-1}{x^2y^2}}$

(xvi) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+\sin(x^2y))^{\frac{1}{x^2+y^2}}$

Problema 13 *Donades les equacions següents indiqueu, orientant-vos gràficament, un interval en el qual pugui assegurar-se que existeix alguna solució:*

(i) $x^3-3x+1=0$

(ii) $x^4+2x^2-x-1=0$

(iii) $x-1=\sin x$

(iv) $x^3=\arctan x$

(v) $t^2+\ln t=0$

(vi) $e^{t-1}=\dfrac{1}{t+1}$

(vii) $e^t=2-t^2$

$(viii)$ $t\ln t=1$

Problema 14 *Indiqueu raonadament si podem assegurar que les funcions següents tenen màxim i mínim absoluts en aquests conjunts:*

(i) $f(x)=x^2-2x+3$ *en l'interval* $[-1,0]$

(ii) $y(x)=1/x$ *en* $\{x\in\mathbb{R}:|x|\geq 1\}$

(iii) $h(t)=\sin t$ *en* $\{t\in\mathbb{R}:|2t-3\pi|<\pi\}$

(iv) $r(t)=e^t\ln|t^2-1|$ *en l'interval* $[-1,2]$

(v) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & , \quad x \neq 0 \\ x & , \quad x = 0 \end{cases}$ *en* $\{x \in \mathbb{R} : \ |x| \leq 1\}$

(vi) $f(x,y) = e^{x+y}\cos(xy)$ *en* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-y| \leq 1 \ i \ |x| \leq 2\}$

(vii) $g(x,y) = \dfrac{x+y^2}{\sin(xy)}$ *en* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 - y^2\}$

$(viii)$ $r(u,v) = \begin{cases} 2u+1 & , \quad u \geq 0 \\ 1+u^2v & , \quad u < 0 \end{cases}$ *en* $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$

Problema 15 *Sigui* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida per* $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy^3)}{x(x^2+y^2)}$.

(i)Com hem de definir f *sobre la recta* $x = 0$ *per a que sigui contínua en tot* $\mathbb{R}^2$*?.*

(ii)Proveu que els extrems de $h(y) \stackrel{def}{=} f(0,y) + e^y$ *sobre l'interval [0,2] es troben en la frontera i classificar-los.*

Problema 16 *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{e^{x+y}-1} & x > -y, \\ 2x & x \leq -y. \end{cases}$$

(i) Estudiar la continuidad de f *en* $\mathbb{R}^2$.

(ii) Definimos $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *como* $g(x) = f(x,1)$. *Analizar la derivabilidad de* g *en* $\mathbb{R}$ *y, en su caso, calcular* g'.

Problema 17 *Estudiar la continuidad de la función* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) + y & x \neq 0, \\ y & x = 0. \end{cases}$$

Problema 18 *Estudiar la continuidad de la función* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2\sin(\dfrac{1}{y}) + x & y \neq 0, \\ x & y = 0. \end{cases}$$

Problema 19 *Estudiar la continuidad de la función* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Problema 20 *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x+y}-1}{x+y} & y \neq -x, \\ 1 & y = -x. \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f *en* $\mathbb{R}^2$.

Problema 21 *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sinh(xy)}{x} & x \neq 0, \\ y & x = 0. \end{cases}$$

(i) Estudiar la continuidad de f *en* $\mathbb{R}^2$.

(ii) Sea $g(x) = f(x,x)$. *Demostrar que* g *es* $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ *y hallar el polinomio de Taylor de orden* 1 *de* g *en un entorno del punto* $x = 0$.

(Indicación: Si $\lim_{x\to a} k(x) = 0$ *entonces* $\sinh(k(x))$ *es un infinitésimo equivalente a* $k(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.*)*