Fonaments Matemàtics

Grau en Enginyeria de la Construcció

Conceptes bàsics. Successions i sèries numèriques.

Problema 1 *Representar les següents funcions:*

(i) $f_1(x) = |x-1|$ (ii) $f_2(x) = 2|x+1|$ (iii) $f_3(x) = |x+3|$

(iv) $f_4(x) = |2x-1|$ $(v) f_5(x) = 2|2x+3|$ (vi) $f_6(x) = |x-2|/2$

Problema 2 *Escriviu en forma d'intervals els subconjunts de nombres reals següents:*

(i) $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\}$ (ii) $\{x \in \mathbb{R} : |x-2| \geq 1\}$

(iii) $\{x \in \mathbb{R} : |x| > 4\}$ (iv) $\{x \in \mathbb{R} : |x^3 - 2x + 1| \geq 0\}$

(v) $\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| \leq 5\}$ (vi) $\{x \in \mathbb{R} : |x-5| < |x-1|\}$

(vii) $\{x \in \mathbb{R} : |x-2| \leq 3\}$ $(viii)$ $\{x \in \mathbb{R} : |x+2||x-2| > 4\}$

(ix) $\{x \in \mathbb{R} : |x-1| < |x|\}$ (x) $\{x \in \mathbb{R} : |x| + |x+1| < 2\}$

Problema 3 *Escriviu en forma d'intervals els subconjunts de nombres reals següents:*

(i) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 \geq 0\}$ (ii) $\{x \in \mathbb{R} : x < 0 \ i \ x^2 + x - 6 < 0\}$

(iii) $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}\}$ (iv) $\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{2x+1}{x+2} < 1\}$

(v) $\{x \in \mathbb{R} : (2x+1)^6(x-1) \geq 0\}$ (vi) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$

(vii) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x < 2\}$ $(viii)$ $\{x \in \mathbb{R} : x < x^2 - 12 < 4x\}$

(ix) $\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x-2}{x+3} < 0\}$ (x) $\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2-4}{x-1} \geq 0\}$

(xi) $\{x \in \mathbb{R} : (x^2+1)(x^2+4)(x^3-1) = 0\}$ (xii) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 1 \leq 0\}$

Problema 4 *Demostreu que si $a \in \mathbb{R}^+$ aleshores es verifica que:*

(i) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq |x| \leq a \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(ii) $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \ o \ x > a \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(iii) $x^2 \leq a \Leftrightarrow -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Problema 5 *Contesta les següents preguntes sobre trigonometria.*

(i) Demostrar les següents igualtats:

$$\sin^2\alpha + \frac{1-\tan^2\alpha}{\sec^2\alpha} = \cos^2\alpha \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - 1$$

(ii) Fent servir les identitats trigonomètriques fundamentals, calcula el sinus i el cosinus de 75°.

(iii) Si α i β son angles complementaris, demostrar que:

$$(\sin\alpha + \sin\beta)(\cos\alpha + \cos\beta) = 1 + \sin(2\alpha)$$

(iv) Expresa $\sin(3a)$ en funció de $\sin a$ i $\cos a$.

Problema 6 *Demostreu que si $A, B \subset \mathbb{R}$ són fitats, aleshores $A \cup B$ i $A \cap B$ són fitats.*

Problema 7 *Sigui $A \subset \mathbb{R}$, proveu que es satisfan les següents relacions:*

$$\overset{\circ}{A} \subset A$$

$$\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overbrace{A \cup B}^{\circ}$$

$$\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \overbrace{A \cap B}^{\circ}$$

És veritat que $A \subset A'$? És cert que $A' = A \cup Fr(A)$?

Problema 8 *Estudieu els subconjunts de $\mathbb{R}$ següents amb la métrica euclídea, és a dir, digueu si són oberts o tancats, indiqueu la seva frontera, la adherència, i el seu interior, digueu si són fitats i indiqueu-ne els punts aïllats i els punts d'acumulació:*

(i) $(-2, 7)$ (ii) $[-1, 1]$ (iii) $\{1, 2, 3, 4\}$ (iv) $[0, 2) \cup \{4\}$

(v) $\mathbb{N}$ (vi) $\mathbb{Z}$ (vii) $\mathbb{Q}$

Problema 9 *Estudieu els subconjunts de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ següents amb la métrica euclídea, és a dir, digueu si són oberts o tancats, indiqueu la seva frontera, la adherència, i el seu interior, digueu si són fitats i indiqueu-ne els punts d'acumulació:*

(i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| < 1\}$

(ii) $[-1, 1] \times [2, 3)$

(iii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$

(iv) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq 1 \text{ i } |y| < 2\}$

(v) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x - 1 \text{ i } |x| < 2\}$

(vi) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$

(vii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| < 2\}$

$(viii)$ $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 4\}$

(ix) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 \text{ i } x^2 + y^2 < 1\}$

Problema 10 *Trobeu el máxim, el mínin, l'ínfim i el suprem, en cas que existeixin, dels subconjunts següents de* $\mathbb{R}$.

$$A_1 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \qquad A_2 = \{n^2,\ n \in \mathbb{N}^*\}$$
$$A_3 = \{(-1)^n \cdot n,\ n \in \mathbb{N}^*\} \qquad A_4 = [1,2] \cup \{-1, 0\}$$
$$A_5 = [-2,1) \cup (3,7) \qquad A_6 = (-\pi/2, \pi/2) \cup \{2\}$$
$$A_7 = (-\infty, 1) \cap (-1, 2]$$

Problema 11 *Trobar el màxim, el mínim, el suprem i l'ínfim, si existeixen, en cadascun sel següents subconjunts de números reals.*

$$\Omega_1 = \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \cdots, \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\right\} \qquad \Omega_2 = (-\infty, -1] \cup \left[2, \frac{6}{5}\right)$$
$$\Omega_3 = \left\{-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \cdots, \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\right\} \qquad \Omega_4 = (-3,-1) \cup (2,5)$$
$$\Omega_5 = \{1, 2, 3, \cdots, n, n \in \mathbb{N} - \{0\}\} \qquad \Omega_6 = [-\sqrt{2}, \sqrt{26}]$$

Problema 12 *Calculeu els límits de successions següents:*

$$\lim_{n\to\infty} (n)^{1/n} \qquad \lim_{n\to\infty} n^2(2^{1/n} - 1) \qquad \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - 2n)$$
$$\lim_{n\to\infty} (1 + (-1)^n) \qquad \lim_{n\to\infty} n(e^{1/n} - 1) \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n} - \frac{n+1}{3n}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{1+2^n} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 2^n}{5^n} \qquad \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{10^n}{2^n}$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^{2n} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{4n^2}\right)^n \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{1/n}$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5n-1}{3n}\right)^{-n^2} \qquad \lim_{n\to\infty} (5^n - 2^n) \qquad \lim_{n\to\infty} (n^2+1)^{1/(n+1)}$$
$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \qquad \lim_{n\to\infty} (\ln(n^2+1) - n) \qquad \lim_{n\to\infty} \ln(n^2 - n + 1)^{1/n}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n^2} \qquad \lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n \sin n}{2^n}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{(2n-1)/n^2}$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n/\sin n} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n+1}\right)^{1/n}$$

Problema 13 *Calculeu el límit de les successions que tenen per terme general:*

(i) $\dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ (ii) $\dfrac{2\sin a+2^2\sin(a/2)+\cdots+2^n\sin(a/n)}{n^2}$

(iii) $\dfrac{1+1/2+\cdots+1/n}{\ln n}$ (iv) $\dfrac{\cos(1)+\cos(2)+\cdots+\cos(n)}{n^2}$

(v) $\dfrac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$ (vi) $\dfrac{\ln(1+1)+\ln(1+\frac{1}{2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})}{n^2}$

(vii) $\sqrt[n^2]{2\cdot 4\cdots 2n}$ $(viii)$ $\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}$

Problema 14 *Calculeu el següent límit segons quins siguin els valors de $a>0$:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^3+n^2}{a(n^3-1)}\right)^{n^2+1}$$

Problema 15 *Trobeu la relació que ha d'existir entre els números $a,b\in\mathbb{R}$ per a que es verifiqui la igualtat següent:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+1}\right)^{an+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+b}{n+2}\right)^{n+2}$$

Problema 16 *Calculeu els següents límits segons quins siguin els valors de $a>0$:*

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a)+\ln(1+a^2)+\cdots+\ln(1+a^n)}{n}$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{a}+\cdots+\dfrac{1}{a^n}}{\ln(n)}$

Problema 17 *Estudieu el caràcter de les sèries numèriques següents:*

(i) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n\,\frac{n+1}{n!}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$

(iii) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(2n-1)}{n}$ (iv) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(v) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ (vi) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}$

(vii) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sin n}{n^3}$ $(viii)$ $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n}{2n-1}$

(ix) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ (x) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$

(xi) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{3^n n!}{n^n}$ (xii) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$

Problema 18 *Es deixa caure una pilota desde una altura* 10 *m. Després de cada caiguda rebota fins a la meitat de la seva altura anterior. Calculeu, sota aquesta hipòtesi, la distància total que recorre la pilota abans de quedar en repòs.*

Problema 19 *Demostreu la igualtat següent:*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left[(1+\frac{1}{n})^n(1+n)\right]}{(n\ln n)(\ln(n+1)^{(n+1)})} = \frac{1}{2\ln 2}.$$

Problema 20 *Estudieu la convergència i, si és possible, sumeu les sèries de nombres reals següents:*

(i) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{5}{4^n}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^n+3^n}{5^n}$

(iii) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (3/4)^{n-1}$

(iv) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} 4^n$

(v) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}\Big)$

(vi) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2^{n-1}}{4}$

(vii) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

$(viii)$ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

(ix) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2n+3}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{3^n}$

(x) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n}{(n+1)!}$

(xi) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(xii) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$